ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ Ε.Μ.Ε.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ - ΜΙΚΡΟΙ

1994-1995

1. Θεωρούμε τους αριθμούς $A=(2^0+8^{21}:16^{15}+6\cdot 27^{10}:81^7)^{63}$

$B=(2^{2^5}:2^{5^2}+1)^{54}$.

Ποιος είναι μεγαλύτερος;

2. Θεωρούμε 6 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.
Έστω α το άθροισμα των τριών πρώτων και β το άθροισμα των τριών άλλων. Είναι δυνατόν να ισχύει αβ=19951995;

3. Στα τετράγωνα ενός 3x3 πίνακα είναι γραμμένα τα ψηφία 0, (σχ. 1).
Λαμβάνουμε ένα 2x2 τετράγωνο του πίνακα και στους αριθμούς που υπάρχουν προσθέτουμε το 1.
Να εξετάσετε, αν μετά από μερικές φορές ο πίνακας μπορεί να γίνει όπως

0	0	0
0	0	0
0	0	0

σχ. 1 $\rightarrow$

4	9	5
10	18	12
7	13	6

σχ. 2 στο σχήμα 2.

4. Τρεις σφαίρες από χρυσάφι έχουν ακτίνες x, 2x, 3x.
Αν η μεγάλη σφαίρα αξίζει 5.400.000δρχ, να βρεθεί πόσο αξίζουν συνολικά οι δύο μικρές;

1996-1997

1. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο Δ. Οι μεσοκάθετοι των ΒΔ και ΓΔ τέμνουν τη ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.
1) Να δειχτεί ότι ΒΕ=ΕΖ=ΖΓ.
2) Να βρεθεί τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ.

2. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί ν ώστε η $Α=ν^4+4ν^3+5ν^2+6ν$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

3. Να εξετάσετε αν μπορούμε να ξαναγράψουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 σε μια σειρά ώστε:
α) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 16.
β) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 15.

4. Δίνονται 10 ομόκεντροι κύκλοι και 10 ακτίνες τους.
Στα σημεία που οι ακτίνες τέμνουν τον εσωτερικό κύκλο γράφουμε διαδοχικά και με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Στον επόμενο κύκλο γράφουμε με την ίδια διαδικασία τους αριθμούς 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Συνεχίζουμε μέχρι το δέκατο κύκλο που γράφουμε τους αριθμούς 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
Με τη διάταξη αυτή οι αριθμοί 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 βρίσκονται στην ίδια ακτίνα και ομοίως για τις άλλες ακτίνες.
Σε 50 από τους 100 αριθμούς που διαθέτουμε βάζουμε το πρόσημο «πλην» φροντίζοντας ώστε:
α) σε κάθε ακτίνα να υπάρχουν ακριβώς 5 «πλην» και
β) σε κάθε έναν από του κύκλους να υπάρχουν ακριβώς 5 «πλην».
Να δειχτεί ότι το άθροισμα των 100 αριθμών που προκύπτουν είναι μηδέν.

1997-1998

1. Να βρεθούν οι φυσικοί α, β, γ, δ, ε για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon}}}}=\frac{1998}{115}.$$

2. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, θετικοί αριθμοί.

Να δειχτεί ότι $\dfrac{(1+3\alpha_1+\alpha_1^2)(1+3\alpha_2+\alpha_2^2)\cdot\ldots\cdot(1+3\alpha_\nu+\alpha_\nu^2)}{\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu}\geq 2^{2\nu}$.

3. Έστω ν πρώτος με $\nu\neq 2$ και $\nu\neq 5$.
Να δειχτεί ότι μεταξύ των (ν πρώτων) όρων της ακολουθίας

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{\nu\ \mu o \nu \alpha \delta \varepsilon \varsigma}$$

υπάρχει ένας που διαιρείται με τον ν.

4. Έστω κύκλος (Ο,R) και ευθεία (ε) που εφάπτεται στον (Ο,R) στο Α. Μια ευθεία (ε') παράλληλη στην ΟΑ τέμνει τον (Ο,R) στα Β, Γ και την (ε) στο Δ (το Γ είναι ανάμεσα στα Β, Δ) και Ε το αντιδιαμετρικό του Γ. Η ΕΑ τέμνει την ΒΔ στο Ζ.
1) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισοσκελές.
2) Να δειχτεί ότι 2ΑΔ=ΕΒ.
3) Αν Κ το μέσον της ΓΖ, να δειχτεί ότι ΑΒ=ΚΟ.
4) Αν R=2,5 και (ΑΔ)=1,5, να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ.

1999-2000

1. Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο.
Να βρεθεί ευθεία του επιπέδου από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν ίσες αποστάσεις.
Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν;

2. Για τον τριψήφιο αριθμό $\overline{\alpha\beta\gamma}$=100α+10β+γ, ξέρουμε ότι:
1) το ψηφίο των εκατοντάδων ισούται με το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων και των μονάδων,
2) $\beta(\gamma+1)=52-4\alpha$.
Να βρεθεί ο αριθμός.

3. Σε κάποια Μαθηματική Ολυμπιάδα για ένα από τα προβλήματα που τέθηκαν, στο οποίο η μέγιστη βαθμολογία ήταν 5, είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:
Ο μέσος όρος των βαθμών των αγοριών ήταν 4, ο μέσος όρος των βαθμών των κοριτσιών ήταν 3,25 και ο μέσος όρος των βαθμών του συνόλου των μαθητών ήταν 3,6.
Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια πήραν μέρος, αν ο αριθμός των μαθητών ήταν μεταξύ 30 και 50.

4. Τέσσερις μαθητές αποφάσισαν να αγοράσουν βιβλία Μαθηματικών, έτσι ώστε:
1) καθένας θα αγοράσει 3 βιβλία διαφορετικά μεταξύ τους,
2) κάθε 2 από τους τέσσερις μαθητές θα αγοράσουν ένα μόνο ίδιο βιβλίο.
Να βρείτε το μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό διαφορετικών βιβλίων που μπορούν να αγοράσουν συνολικά οι τέσσερις μαθητές.

2000-2001

1. Αν α, β, x, y είναι θετικοί ακέραιοι με α+β=1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}} \leq \alpha x+\beta y.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Οι αριθμοί μ, ν είναι ακέραιοι.
1) Να βρεθούν τα ζεύγη (μ,ν) που επαληθεύουν την εξίσωση

$$(E): \mu^3-4\mu\nu^2=8\nu^3-2\mu^2\nu.$$

2) Από τα ζεύγη που θα βρείτε να προσδιορίσετε εκείνα που ικανοποιούν την εξίσωση (Ε'): $μ+ν^2=3$**.**

3. Έχουμε 8 σώματα διαφορετικού βάρους και μια ζυγαριά χωρίς σταθμά, δηλαδή με αυτήν μπορούμε μόνο να συγκρίνουμε τα βάρη δύο σωμάτων.
1) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσεων που πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το βαρύτερο σώμα**;**
2) Πόσες επιπλέον ζυγίσεις, θα χρειασθούμε για να προσδιορίσουμε το δεύτερο σε βάρος σώμα**;**

4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΑΔ και τις διχοτόμους ΑΕ, ΒΖ που τέμνονται στο Ι. Από το Ι φέρουμε την ΙΘ κάθετη προς την ΑΓ. Επιπλέον φέρουμε την ευθεία x'Ax κάθετη προς την ΑΓ. Η προέκταση της ΕΘ τέμνει την x'Ax στο Κ.
Να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΑΚ**.**

2001-2002

1. Προς το εξωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $Γ\hat{Α}Δ=90^o$.
Οι προεκτάσεις των τμημάτων ΔΑ, ΓΒ τέμνονται στο Ε.
1) Να υπολογιστεί η γωνία $Δ\hat{Β}Γ$**.**
2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ συναρτήσει της πλευράς α**.**
3) Να υπολογίσετε το μήκος του ΒΔ συναρτήσει του α**.**

2. Στον διαγωνισμό ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ της Ε.Μ.Ε. συμμετέχουν αγόρια και κορίτσια που χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στους "μικρούς" και τους "μεγάλους".
Τα αγόρια που λαμβάνουν μέρος στον φετινό ΑΡΧΙΜΗΔΗ αποτελούν το 55% αυτών που συμμετέχουν. Ο λόγος του πλήθους των "μικρών αγοριών" προς το πλήθος των "μεγάλων αγοριών" ισούται με το λόγο του πλήθους των "μικρών" προς το πλήθος των "μεγάλων".
Να βρεθεί ο λόγος του πλήθους των "μικρών αγοριών" προς το πλήθος των "μικρών κοριτσιών"**.**

3. Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς α, β, γ με $α\leq β\leq γ$ για τους οποίους ισχύει ότι: $αβ+βγ+γα-αβγ=2$**.**

4. Να αποδειχτεί ότι $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2002<\left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$**.**

2004-2005

1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ=α, ΓΔ=2α και ΔΒ⊥ΒΓ.
Έστω Μ το μέσον της ΓΔ, Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΑΒΜΔ, Κ το σημείο τομής των ευθειών ΔΑ, ΓΒ και Λ το σημείο τομής των ευθειών ΚΟ και ΑΒ.
Να δειχτεί ότι:
1) Το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι ρόμβος.
2) Το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ισοσκελές.
3) Η ευθεία ΔΛ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΒ στο μέσον του.

2. Αν σε τριψήφιο θετικό ακέραιο Α προσθέσουμε το πενταπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 840.
Να βρεθεί ο αριθμός Α.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(\nu)=\dfrac{2\nu+1+\sqrt{\nu(\nu+1)}}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}$, ν θετικός ακέραιος.
1) Να δειχτεί ότι $f(1)=2\sqrt{2}-1$.
2) Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος Σ=f(1)+f(2)+…+f(100).

4. Δίνεται κύκλος (C) κέντρου Ο και ακτίνας R καθώς και σημείο Α εκτός αυτού με ΟΑ=d.
Να προσδιορίσετε σημεία Β, Γ και Δ πάνω στον κύκλο (C) έτσι ώστε να σχηματίζεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

2006-2007

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων του. Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο (C_2) του τριγώνου ΒΙΓ στο σημείο Ν με Ν≠Ι.
Να προσδιορίσετε:
1) Τις γωνίες του τριγώνου ΒΓΝ συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.
2) Το κέντρο του κύκλου (C_2).

2. Ο αριθμός Α=4ν+3, ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 11.
Να βρείτε: **1)** Την μορφή του αριθμού ν.
2) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν^4 με το 11.

3. Έστω $A=\sqrt{\kappa^2+24}$ και $B=\sqrt{\kappa^2-9}$, όπου κ ακέραιος.
Να προσδιορίσετε τις τιμές του κ που είναι τέτοιες ώστε η διαφορά $A-B$ να είναι ακέραιος αριθμός.

4. Καθένας από τους 50 μαθητές μιας τάξης έστειλε τα Χριστούγεννα κάρτες σε 25 ακριβώς συμμαθητές του.
Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τους μαθητές της τάξης πήραν ο ένας την κάρτα του άλλου.

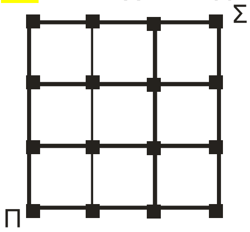
2008-2009

1. Αν ο αριθμός $K=\dfrac{9\nu^2+31}{\nu^2+7}$ είναι ακέραιος,
να προσδιορίσετε τις τιμές του ακεραίου ν.

2. Από την κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία Αx που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην Αx παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΑ=ΒΕ.
Να υπολογιστεί η γωνία $A\hat{E}\Gamma$.

3. Θεωρούμε τους αριθμούς $A=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\dfrac{595}{598}\cdot\dfrac{597}{600}$ και
$B=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\dfrac{596}{599}\cdot\dfrac{599}{601}$.
Να αποδείξετε ότι: **1)** $A<B$. **2)** $A<\dfrac{1}{5.990}$.

4. Το σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας



πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ).
Στην πλατεία βρίσκονται κ μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο).
Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του κ έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.