ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ
ΜΕ ΥΠΑΡΧΕΙ

1. Υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$: $f^2(2^x)+f(x^2)=-1$, για κάθε x;

2. Υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής $[0,+\infty)$, η οποία δεν παρουσιάζει ακρότατο στο 0;

3. Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(f(x))=x^2-x+1$, $\forall x\in R$. Υπάρχει συνάρτηση γνησίως μονότονη g: $g(x)=1+x^2-xf(x)$;

4. Υπάρχει συνάρτηση f: ώστε να υπάρχει $f'(x_0)$ και να μην υπάρχει $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$;

5. Υπάρχει συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει $f'=fof$;

6. Υπάρχει συνάρτηση f συνεχής $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, $f'(x)\le 1$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$;

7. Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η παράγωγος μηδενίζεται σε άπειρα σημεία του $(0,1)$ και δεν είναι σταθερή;

8. Υπάρχει συνάρτηση που η C_f τέμνει σε άπειρα σημεία την πλάγια ασύμπτωτή της;

9. Υπάρχει συνάρτηση που να μην είναι η σταθερή η οποία έχει άπειρες εφαπτομένες παράλληλες στον $x'x$;

10. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ αλλά έχουν παράγουσα σ' αυτό;

11. Υπάρχει συνάρτηση f συνεχής με $f:R\to Q$ η οποία δεν είναι σταθερή;

12. Υπάρχουν f,g παραγωγίσιμες: $(f\cdot g)'=f'\cdot g'$;

13. Υπάρχει συνάρτηση συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη;

14. Υπάρχει συνάρτηση, η οποία δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της (B_κ);

15. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ η οποία παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. Να εξετάσετε αν η f είναι πάντα συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

16. Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι ταυτόχρονα άρτιες και περιττές;

17. Υπάρχουν συναρτήσεις f,g ασυνεχείς στο x_0, ενώ $f+g$, $f\cdot g$ συνεχείς στο x_0;

18. Υπάρχει συνάρτηση f συνεχής και "$1-1$" που η αντίστροφή της δεν είναι συνεχής;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Θέτουμε $x^2=2^x \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=4)$

Για $x=2$ η δοσμένη $f^2(4)+f(4)=-1 \Leftrightarrow f^2(4)+f(4)+1=0$ (1)

Το τριώνυμο $x^2+x+1=0$ έχει $\Delta=-3<0$ δεν έχει λύση στο R, οπότε η (1) είναι αδύνατη.

Επομένως δεν ορίζεται το $f(4)$, άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

2. Έστω $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο 0 διότι $f(0)=0$.

$\left|x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right|\le |x^2|\to 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

Αν πάρουμε $x_ν=\dfrac{1}{2νπ-\dfrac{π}{2}}$, $x_ν{}'=\dfrac{1}{2νπ+\dfrac{π}{2}}$ τότε $x_ν\to 0$, $x_ν{}'\to 0$.

Όμως $f(x_ν)=\left(\dfrac{1}{2νπ-\dfrac{π}{2}}\right)^2\cdot ημ\left(2νπ-\dfrac{π}{2}\right)<0$

$f(x_ν{}')=\left(\dfrac{1}{2νπ+\dfrac{π}{2}}\right)^2\cdot ημ\left(2νπ+\dfrac{π}{2}\right)>0$

Κοντά στο 0 οι τιμές της f δεν έχουν σταθερό πρόσημο. Άρα το $f(0)=0$ δεν είναι ακρότατο.

3. Για $x=1$: $f(f(1))=1$

Για $x=f(1)$: $f(f(f(1)))=f^2(1)-f(1)+1 \Rightarrow f(1)=f^2(1)-f(1)+1 \Rightarrow$

$(f(1)-1)^2=0 \Rightarrow f(1)=1$

$g(0)=1,\ g(1)=1$. Άρα η g δεν είναι μονότονη, και επομένως δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

4. Αν $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη παντού.

Επίσης $f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Όμως δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

Αν πάρουμε $g(x)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$

$x_\kappa=\dfrac{1}{2\kappa\pi},\ x_\kappa{}'=\dfrac{1}{2\kappa\pi+\pi},\ x_\kappa, x_\kappa{}'\to 0$

$g(x_\kappa)=1,\ g\left(x_\kappa{}'\right)=-1$

Άρα η g δεν έχει όριο στο 0 και κατ' επέκταση η f'.

5. Έστω ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση f με $f(x)>0$. Τότε

$f(f(x))>0 \Rightarrow f'(x)=f(f(x))>0 \Rightarrow$ Η $f\uparrow$.

Έχουμε $f(x)>0 \Rightarrow f(f(x))>f(0) \Rightarrow f'(x)-f(0)>0 \Rightarrow (f(x)-xf(0))'>0$

Οπότε η $g(x)=f(x)-xf(0)$ στο R

Για $x<0 \Rightarrow g(x)<g(0) \Rightarrow f(x)-xf(0)<f(0) \Rightarrow f(x)<(1+x)f(0)$

Όμως για $x<-1 \Rightarrow 1+x<0 \Rightarrow (1+x)f(0)<0 \Rightarrow f(x)<0$ άτοπο

Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

6. *α΄ τρόπος*

Μια τέτοια συνάρτηση φαίνεται να είναι η $f(x)=x$. Θεωρούμε $g(x)=f(x)-x$, $g(\alpha)=g(\beta)=0$, $g'(x)=f(x)-1\leq 0$ άρα η $g\downarrow(\alpha,\beta)$.

Τότε $\alpha<x<\beta \Rightarrow g(\alpha)\geq g(x)\geq g(\beta) \Rightarrow 0\leq g(x)\leq 0$

Άρα $g(x)=0 \Rightarrow f(x)=x$

Εύκολα βλέπουμε ότι η $f(x)=x$ πληροί τις αρχικές συνθήκες.

β΄ τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι $f(x)\neq x$.

Θα υπάρχει τότε ένα τουλάχιστον x_0: $f(x_0)\neq x_0$

Θέτουμε $f(x_0)=\kappa\neq x_0 \Leftrightarrow (\kappa>x_0 \text{ ή } \kappa<x_0)$

i) Αν $\kappa>x_0$. Στο $[\alpha,x_0]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,x_0): f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} \Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{\kappa-\alpha}{x_0-\alpha}\leq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa-\alpha\leq x_0-\alpha \Rightarrow x_0\geq\kappa$ άτοπο

ii) Αν $\kappa<x_0$. Η f στο $[x_0,\beta]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\rho\in(x_0,\beta)$:

$$f'(\rho)=\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}\Rightarrow f'(\rho)=\frac{\beta-\kappa}{\beta-x_0}\leq 1\Rightarrow \beta-\kappa\leq\beta-x_0 \Rightarrow -\kappa\leq -x_0 \Rightarrow \kappa\geq x_0$$

άτοπο

Άρα $f(x)=x$, για κάθε x.

7. ΝΑΙ

Η $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Ακόμα αν $h(x)=\dfrac{\eta\mu\pi x}{x^2+1}$ σε κάθε διάστημα $[\kappa,\kappa+1]$, $\kappa\in Z$ ισχύει το Θεώρημα Rolle οπότε υπάρχει $\xi_\kappa\in(\kappa,\kappa+1): h'(\xi_\kappa)=0$

8. ΝΑΙ

Η $g(x)=x+\dfrac{\eta\mu x}{e^x}$

Η C_g έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=x$. Πράγματι

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{e^x}\right)=0 \text{ αφού } \left|\frac{\eta\mu x}{e^x}\right|\leq\frac{1}{e^x}\to 0$$

Επίσης $g(x)=x\Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{e^x}=0\Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi, \kappa\in Z$

9. Όπως το (7).

10. Ισχύουν

α) Αν f συνεχής στο $\Delta \Rightarrow$ έχει παράγουσα στο Δ

β) Αν η f δεν έχει παράγουσα στο Δ δεν είναι συνεχής στο Δ (είναι το αντίθετο – αντίστροφο του (α))/

Η πρόταση (10) είναι η αντίθετη της (α).

Έστω $f(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Η f δεν είναι συνεχής στο 0, αλλά έχει παράγουσα

$F(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

11. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$, δηλαδή θα παίρνει και άρρητες τιμές.

Αυτό αντιφάσκει στο ότι $f(R)\subseteq Q$.

Άρα $f(x)=c$, σταθερή.

12. Αν $f(x)=e^{3x}$, $g(x)=\kappa e^{\frac{3}{2}x}$, $\kappa\neq 0$

Τότε :

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\left(\kappa e^{3x+\frac{3}{2}x}\right)'=\kappa e^{\frac{3}{2}x+3x}\cdot\left(3+\frac{3}{2}\right)=\frac{9\kappa}{2}e^{3x+\frac{3}{2}x}$$

$$f'(x)\cdot g'(x)=3e^{3x}\kappa\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}=\frac{9\kappa}{2}e^{3x+\frac{3}{2}x}$$

Άρα $(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

Γενικά δεν ισχύει

13. Η συνάρτηση Weiestrass $f(x)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{\nu}}\cos(3^{\nu}x)$

Ακόμα και η $f(x)=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{\nu}}\phi(10^{\nu}x)$, όπου $\phi(x)=[x]$ ακέραιο μέρος του x.

14. ΝΑΙ

Η συνάρτηση του Diriclet: $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$

αλλά και οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}x\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^{2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

δεν είναι μονότονες σε κανένα διάστημα $[0,\alpha]$.

15. Αν $f(x)=\begin{cases}\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ \kappa & ,\ x=0\end{cases}$ μεταξύ των σημείων $\alpha=-\frac{2}{\pi}$, $\beta=\frac{2}{\pi}$ με $f(\alpha)=-1$, $f(\beta)=1$, η f παίρνει όλες τις τιμές του $[-1,1]$ και μάλιστα άπειρες.

Η f είναι συνεχής για $x\neq 0$, ως σύνθεση των $\eta\mu x$, $\frac{1}{x}$, ενώ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$ για οποιοδήποτε κ, αφού δεν υπάρχει το όριο στο 0.

Αν $x_{\nu}=\frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$, $x_{\nu}'=\frac{1}{2\nu\pi-\frac{\pi}{2}}$, $x_{\nu},x_{\nu}'\to 0$

$$\lim f(x_{\nu})=\eta\mu\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\lim f(x_{\nu}')=\eta\mu\left(2\nu\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

άρα δεν έχει όριο στο 0.

16. Η f άρτια στο συμμετρικό σύνολο Δ.

$f(-x)=f(x)$ ενώ η f περιττή $f(-x)=-f(x)$

Άρα $f(x)=-f(x)\Rightarrow f(x)=0$.

Αν $f(x)=0$, $x\in(-\alpha,\alpha)$, $\alpha\in R,\ \alpha>0$

τότε υπάρχουν άπειρες τέτοιες συναρτήσεις.

17. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ -1, & x\notin Q\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-1, & x\in Q\\ 1, & x\notin Q\end{cases}$$

που είναι ασυνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους αφού δεν έχουν όριο σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού τους.

θα δείξουμε ότι η f δεν έχει όριο σε κανένα $x_0\in R$.

Έστω $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\in R$. Τότε $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0:$ $\forall x:$ $0<|x-x_0|<\delta$ ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Αν $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ η τελευταία ανισότητα θα ισχύει για ρητούς και άρρητους.

Για ρ ρητό $|f(\rho)-\ell|<\dfrac{1}{2}$, για α άρρητο: $|f(\alpha)-\ell|<\dfrac{1}{2}$ τότε

$$|f(\rho)-f(\alpha)|=\left|(f(\rho)-\ell)-(f(\alpha)-\alpha)\right|\le\left|(f(\rho)-\ell)\right||+\left|(f(\rho)-\alpha)\right|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Άρα $|f(\rho)-f(\alpha)|<1\Rightarrow|1-f(1)|<1\Rightarrow 2<1$ αδύνατο

Όμως $(f+g)(x)=0$ και $(f-g)(x)=-1$

για όλα τα x που είναι συνεχείς.

18. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x & ,x\in[0,1)\\ x-1, & x\in[2,3)\end{cases}$$

Η f είναι "$1-1$" και συνεχής, όμως η αντίστροφή της δεν είναι συνεχής στο $f^{-1}([0,2])$.