ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$, τότε η f συνεχής στο x_0.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Αν f συνεχής στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ τότε μπορεί να είναι $f(\Delta)=R^*$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

στ) $(fof^{-1})(x)=x$, $x\in D_f$.

ΘΕΜΑ 2

Από όλους τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει $|z-1-3i|=2\sqrt{10}$ να βρείτε εκείνους για τους οποίους

α) το $|z|$ ελάχιστο

β) το $|z|$ μέγιστο

ΘΕΜΑ 3

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ και οι μιγαδικοί

$$z=\alpha^2+if(\alpha),\ w=f(\beta)+i\beta^2,\ \alpha\cdot\beta\neq 0$$

Αν ισχύει $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$, να αποδείξετε ότι:

α) $\operatorname{Re}(w\bar{z})=0$

β) $\alpha^2 f(\beta)+\beta^2 f(\alpha)=0$

γ) η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα σημείο $M(\xi,f(\xi))$, $\xi\in[\alpha,\beta]$.

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΘΕΜΑ 4

Έστω f συνεχής $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (2,3)$.

Να δείξετε ότι:

α) $f(2) = f(3)$

β) υπάρχει $\xi \in (2,3) : 5f(\xi) = 2f(2) + 3f(3)$

γ) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (2,3) : f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) > 0$

Διάρκεια 3h