ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1

Α.α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ δίνεται από τον τύπο $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha$, για κάθε $x\in R$.

β) Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, του πεδίου ορισμού της;

Β. Να απαντήσετε αν είναι Σωστή ή Λάθος η πρόταση:

α) Κάθε συνεχής συνάρτηση f, διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της.

β) Αν $z\in C$ και $\nu\in N$ τότε $|z|=1\Rightarrow z^\nu=1$

γ) Αν $i^\nu=1$, τότε $\nu=0$

δ) Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z,w ισχύει

$$\operatorname{Re}(z+w)=\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Re}(w)$$

ε) Για οποιοδήποτε μιγαδικό z ισχύει $\left(z-\bar{z}\right)^2\geq 0$

στ) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in D_f$. τότε η f σταθερή στο D_f.

ζ) Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ ισχύει $\left(\int_\alpha^\beta f(t)dt\right)\cdot\left(\int_\gamma^\beta f(t)dt\right)<0$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\gamma)$: $f(x_0)=0$

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση f, μη σταθερή, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)\neq 0$ και μιγαδικός z: $|z-f(\alpha)-f(\beta)|=|z-f(\alpha)i+f(\beta)i|$

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι μια ευθεία (ε).

β) Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ και η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{f^2(\alpha)+f^2(\beta)}$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta):f'(x_0)=0$.

γ) Αν είναι: $f([\alpha,\beta])=[f(\beta),f(\alpha)]$, $f(\alpha)>0$ και η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda>0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):f(\xi)=0$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2-\ln x^2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς: $z=3\alpha+4\alpha i$, $\alpha\in R$

Αν $\alpha=f(x)$, $x\in R$ να βρείτε:

i) την ελάχιστη τιμή της f.

ii) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

iii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|z|=5c$, για κάθε $c\in R$.

ΘΕΜΑ 4

Α. Έστω $f(x)=\int_0^x e^{x\cdot t}dt$ με $x>0$. Να αποδειχτούν τα εξής:

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Β. Έστω $z=\alpha+\beta i$, $\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta\in R^*$. Αν $A=|z|^2-2\operatorname{Re}(z)$ δείξτε ότι:

α) $|z-1|>z$

β) $\int_0^{A+1}|z|e^x dx>\int_0^{A+2\operatorname{Re}(z)}|z-1|e^x dx$

Διάρκεια 3h