ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ - ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΘΕΜΑ Ι

Α. Αν f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$, να δείξετε ότι η f συνεχής στο x_0.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λάθος (Λ).

1. Η μορφή $\dfrac{0}{+\infty}$ είναι απροσδιόριστη.

2. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z_1 \neq z_2$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο.

3. Κάθε τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης είναι μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο.

4. Αν ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια στο x_0, τότε ισχύει

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

5. Αν η f δεν έχει σημεία καμπής τότε είναι κυρτή ή κοίλη στο R.

6. Αν f παραγωγίσιμη δύο φορές και $2f(x) \geq f(1) + f(2)$, $\forall x \in R$ τότε η f'' έχει δύο ρίζες.

7. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=} \lim_{x \to \alpha} \frac{\left(f(x) - f(\alpha)\right)'}{\left(x - \alpha\right)'} \Rightarrow f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} f'(x)$$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Α. Έστω οι μιγαδικοί $z = \dfrac{2\lambda + 4i}{2 + \lambda i}$, $\lambda \in R$

α. Να δείξετε ότι $|z| = 2$.

β. Να δείξετε ότι οι μιγαδικοί $w = z + \frac{4}{z}$ είναι πραγματικοί.

γ. Να βρείτε το λ, ώστε ο w να είναι ο μεγαλύτερος.

Β. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.

$$[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = e^{2x}, \ \forall x \in R$$

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Η εξίσωση $f(x) = x \cdot e^x$, είναι μια λύση στο $(-1,1)$.

ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Α. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to R$ με $\beta > \alpha > 0$. Έστω και ο μιγαδικός

$z = \dfrac{\alpha + if(\alpha)}{\beta + if(\beta)}$, ο οποίος είναι πραγματικός.

α. Να δείξετε ότι $\beta f(\alpha) = \alpha f(\beta)$, και $0 < z < 1$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ έχει μία τουλάχιστον λύση $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Β. Έστω $f(x) = |x + z_1| + |2x + z_2|$, z_1, z_2 μιγαδικοί με $z_1 \neq z_2$ και $|z| = |z_2| = 2$. Να δείξετε ότι:

α. Η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

β. Υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[f\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot ημx \right]$.

γ. Η εξίσωση $f(x) = e^x$, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΘΕΜΑ IV

Α. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=f'(0)=1$ ώστε

$$f''(x)=\frac{x^2-4x+1}{x^2+1}\cdot f'(x)+\frac{2(x-1)}{x^2+1}\cdot f(x),\ \forall x\in R$$

α. Να βρείτε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

β. Βρείτε επίσης το σύνολο τιμών της f.

γ. Το πλήθος λύσεων της $f(x)=\lambda$.

Β. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(1)=1$ και $f'(1)=3$ ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύουν

$$f(x)\neq 0 \quad \text{και} \quad f'(x)\cdot f''(x)=18f(x)$$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f'(x)\right)^3-27f^2(x)$ είναι σταθερή, $x>0$.

γ. Να βρείτε την f.

δ. Επίσης αν, $0<\alpha<\beta$ δείξτε $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2}>\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$