ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗ – ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ Ι

Α. **i)** Να αποδείξετε ότι $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, $z, w \in C$

ii) Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Β. Να γράψετε αν είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) η πρόταση:

1. Αν f, g συναρτήσεις $fog = gof$.
2. Αν h, f, g συναρτήσεις $(fog)oh = fo(goh)$
3. Αν η f συνεχής και $\uparrow$ στο R τότε. $f(R) = R$.
4. Αν f συνεχής στο σύνολο Δ και δεν είναι σταθερή, τότε $f(\Delta)$ διάστημα.
5. Αν f συνεχής στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f ασυνεχής στο x_0.
6. Αν f συνεχής στο $[0,10]$ και $f(0) = 20$, $f(10) = 100$ τότε

   $f([0,10]) \subseteq [20,100]$ ή $f([0,10]) = [20,100]$
7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$
8. Αν $z \in I \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Δίνεται ο μιγαδικός $\alpha = 3+4i$ και ο μιγαδικός z με $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 50$.

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα Μ του z κινείται σε ευθεία (ε).

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z_0, ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο. Πόσο είναι το $|z_0|$;

γ) Αν $w \in C$ και $|w| \le 2$ να αποδείξετε ότι $|z - w| \ge 3$.

ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \dfrac{z+i}{1+iz}, z \ne i$

α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{|w-i|}{|w+i|} = |z|$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

β) Αν $|z|=1$ και Μ είναι η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει στον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι $w \in I \Leftrightarrow z \in I$.

δ) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>1$, $z=f(\alpha)\cdot i$, $w=f(\beta)\cdot i$. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β).

Ο.Ε.Φ.Ε. 2006

ΘΕΜΑ IV

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x)+2f(x)=x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η f αντιστρέφεται.

β) Η f έχει πεδίο τιμών R.

γ) $f^{-1}(x)=x^3+2x$

δ) Η f συνεχής στο R.

ε) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x^\nu}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\nu\in N$.

ζ) Αν $\alpha,\beta\in R:\ f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή

$$E=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda},\quad \kappa,\lambda>0$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3h

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ