ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Άσκηση 1

Αν $\alpha,\beta.\gamma>0$ να δείξετε ότι:

α) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma$

β) $3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\geq\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2$

γ) $\dfrac{2\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)}{\alpha\beta\gamma}+\dfrac{6\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2}\geq 8$

Άσκηση 2

Αν $\alpha,\beta.\gamma>0$ να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq\alpha\beta$

β) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma^2-\alpha\gamma+\alpha^2}{\alpha}$

γ) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\gamma}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma$

Άσκηση 3

Αν α, β, γ θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι:

α) $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

β) $\left(\alpha+\beta\right)\left(\beta+\gamma\right)\left(\gamma+\alpha\right)\geq 8\alpha\beta\gamma$

Άσκηση 4

Αν $x,y,z>0$ να δείξετε ότι:

α) $\dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2}\geq\dfrac{2x-y}{3}$

β) $\dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\dfrac{z^3}{z^2+zx+x^2}\geq\dfrac{x+y+z}{3}$

Άσκηση 5

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί. Αφού θέσετε $x=\alpha+\beta$, $y=\beta+\gamma$, $z=\gamma+\alpha$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha+\beta}\geq 0$$

Άσκηση 6

Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ και $x,y,z\in R$ να δείξετε ότι:

α) $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}\geq\dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$

β) $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\geq\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

γ) $\dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta+\delta}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\gamma+\delta}+\dfrac{\delta+\beta}{\delta+\alpha}\geq 4$

Άσκηση 7

Αν οι x,y,z είναι θετικοί, να δείξετε ότι:

α) $x^3+y^3\geq xy(x+y)$

β) $\dfrac{1}{x^3+y^3+xyz}+\dfrac{1}{y^3+z^3+xyz}+\dfrac{1}{z^3+x^3+xyz}\leq\dfrac{1}{xyz}$

Άσκηση 8

Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ να δείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\dfrac{\alpha+\beta}{4}$

β) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}\leq\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

Άσκηση 9

Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ να δείξετε ότι:

α) $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

β) $\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\cdot\left(\beta+\frac{\gamma}{\beta\alpha}\right)\cdot\left(\gamma+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)\geq 8$

Άσκηση 10

Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ να δείξετε ότι:

α) $\alpha^3\geq\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3$

β) $\frac{\alpha^3}{\beta^2}\geq\frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha-\beta$

γ) $\frac{\alpha^3}{\beta^2}+\frac{\beta^3}{\gamma^2}+\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\geq\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha}$

Άσκηση 11

Αν α, β, γ θετικοί να δείξετε ότι:

α) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma$

β) $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

γ) Αν $\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{1+\gamma}=1$, δείξτε $\alpha\beta\gamma\geq 8$

Υποδ: Θέστε $\frac{1}{1+\alpha}=x$, $\frac{1}{1+\beta}=y$, $\frac{1}{1+\gamma}=z$, α, β, γ > -1

Άσκηση 12

Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ να δείξετε ότι:

α) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)\geq 9$

β) $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{9}{2}$, $x+y+z=1$, $x,y,z>0$

Άσκηση 13

Αν $\alpha,\beta>1$ να δείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$

β) $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha-1}} \geq 2$

γ) $\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1} \geq 8$, $x, y > 1$

Άσκηση 14

Αν $x, y, z > 0$ και $x+y+z=1$ να δείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

β) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right) \geq 64$

Άσκηση 15

Να αποδείξετε ότι:

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{1997\cdot 1998} \quad \text{και}$$

$$B = \frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}$$

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\dfrac{A}{B} \in Z$

Άσκηση 16

Να βρεθούν τα στοιχεία του συνόλου $A = \left\{ x \in Z / \dfrac{x^3-3x+2}{2x+1} \in Z \right\}$.

Άσκηση 17

Έστω 5 σημεία στο εσωτερικό ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 1. Να αποδειχθεί ότι δύο τουλάχιστον από αυτά απέχουν λιγότερο από $\dfrac{1}{2}$.

Άσκηση 18

Στο εσωτερικό μοναδιαίου τετραγώνου, θεωρούμε 129 σημεία. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει κύκλος ακτίνας $\dfrac{1}{8}$ που περιέχει τουλάχιστον 3 σημεία.

Άσκηση 19

α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που είναι τέλειο τετράγωνο έχει τη μορφή 4κ ή $4\kappa+1$ με $\kappa \in Z$.

β) Να βρεθεί σε πόσους πενταψήφιους αριθμούς, οι οποίοι είναι τέλεια τετράγωνα, τα δύο τελευταία ψηφία είναι ίσα.

Άσκηση 20

Να λύσετε την εξίσωση ως προς x

$$\frac{3\alpha+1}{\alpha+x}-\frac{\alpha-1}{\alpha-x}=\frac{2\alpha\left(\alpha^2-1\right)}{x^2-\alpha^2},\ \alpha \in R.$$

Αν $\alpha \in Z$, για ποιες τιμές του α η λύση είναι πρώτος αριθμός;

Άσκηση 21

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left[2\left(\lambda^2+\mu^2\right)x-\left(\lambda+\mu\right)^2-4\right]x=\lambda^2-\lambda\mu+\lambda+\mu-2 \text{ με } \lambda,\mu \in R.$$

Άσκηση 22

Να βρείτε όλες τις τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x \le 1 \\ x-y+\alpha=0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση. Ποιες είναι οι λύσεις αυτές;

Άσκηση 23

Να βρείτε τα ζεύγη των φυσικών (x,y):

$$|x-2|+|y-3|=3-y$$

Άσκηση 24

Να λυθεί: $\left|x^2+3x-4\right|=\left|x^2+x+1\right|+|2x-5|$