ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους της Γ΄τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(x) = 3 + \sqrt{2x-4}$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Δίνονται οι συναρτήσεις F(χ)= αχ+3 και $G(\chi) = \dfrac{\alpha.\chi^3 + 4\alpha\chi^2 + 4\chi + 3}{\chi^2 + \alpha\chi + 1}$

Να βρείτε τα α και β ώστε οι συναρτήσεις F, G να είναι ίσες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού Α της f
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι "1-1"
- Βρίσκουμε το πεδίο τιμών της f
- Θέτουμε f(x)=ψ και λύνουμε ως προς χ, δηλαδή $\chi=f^{-1}(\psi)$ και έπειτα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής χ→ψ→χ και βρίσκουμε τον τύπο τηw αντίστροφης με μεταβλητή χ.

Η f έχει πεδίο ορισμού το Α=[2, +00)

Έστω χ_1, $\chi_2 \in$ Α με

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 3 + \sqrt{2x_1 - 4} = 3 + \sqrt{2x_2 - 4} \iff 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Άρα "1-1"

Για να προσδιορίσουμε το πεδίο τιμών ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

Θέτουμε f**(x)=ψ,** *και αναζητάμε τις τιμές του ψ για τις οποίες η εξίσωση f(x)=ψ με άγνωστο χ και παράμετρο ψ έχει λύση στο Α.*

Οπότε $3 + \sqrt{2x-4} = \psi \iff \sqrt{2\chi - 4} = \psi - 3$, πρέπει $\psi-3 \geq 0 \Rightarrow \psi \geq 3$

Επομένως έχουμε $2\chi-4=(\psi-3)^2 \Rightarrow \chi=\frac{1}{2}\{4 + (\psi-3)^2\}$

Άρα $\psi=\frac{1}{2}\{4 + (\chi-3)^2\}$ με $\chi \in [3, +00)$, f (A)=[3, +00)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ ΙΙ

Το πεδίο ορισμού της F είναι το R. Απαιτούμε και το πεδίο ορισμού της G να είναι το R. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το τριώνυμο $\chi^2+\alpha\chi+1$ να μην έχει ρίζες.Αυτό συμβαίνει όταν Δ<0, δηλαδή

$\alpha^2-4<0 \Rightarrow \alpha^2<4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$

Επίσης για κάθε x πραγματικό θα πρέπει να ισχύει

F(x)=G(x)

$$\Leftrightarrow \frac{ax^3 + 4ax^2 + 4x + 3}{x^2 + ax + 1} = a.x + 3 \Leftrightarrow (ax^3 + 4ax^2 + 4x + 3) = (ax+3)(x^2 + ax + 1) \Leftrightarrow$$

$$(a^2 - 4a + 3)x^2 + (4a-4).x = 0, \forall x \in \Re$$

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει ($\alpha^2-4\cdot\alpha+3=0$ και 4.α-4=0) άρα

((α=1 ή α=3) και α=1) οπότε α=1

Η τιμή αυτή ικανοποιεί την συνθήκη -2<α<2 και για α=1 οι συναρτήσεις γίνονται

F(x)=x+3 ενώ G(x)= $\dfrac{x^3+4x^2+4x+3}{x^2+x+1} = \dfrac{(x+3).(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} = x+3$

Είναι λοιπόν $D_f=D_g$ και F(x)=G(x). Άρα F=G

Προτεινόμενα θέματα των οποίων η λύση θα δημοσιευθεί την επόμενη εβδομάδα

ΘΕΜΑ Ι

Έστω οι μιγαδικοί z, w διαφορετικοί του μηδενός, για τους οποίους ισχύει

$|z| = 1, \kappa\alpha\iota..4.\dfrac{z}{w} + \dfrac{w}{z} = 2$, να αποδείξετε ότι:

i) $|w| = 2$

ii) το τρίγωνο που έχει τις κορυφές των 0, z, w είναι ορθογώνιο και να βρείτε τις γωνίες του

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $|x.z + (1-x)w| = e^x$ έχει μια λύση στο (0,1)

ΘΕΜΑ ΙΙ

i) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με την ιδιότητα $f^3(x) + f(x) + x = 2008$, είναι αντιστρέψιμη.

ii) Να βρεθεί η αντίστροφη της και το f(2008)

iii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^{-1}(x) - 2006}{f^3(x) + f(x) - 2007}$

iv) Αν ισχύει $z^{100} + z^{99} + ... + z + 1 = \lim\limits_{x \to 2008} f(x)$ να δείξετε ότι $z + \dfrac{1}{z} \in \Re$

Επιμέλεια θεμάτων:

Στράτος Κωστής, μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Λύσεις των ασκήσεων του προηγούμενου φύλλου

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1^{Ο} ΘΕΜΑ

ι)Θέτω $\left|\dfrac{z}{w}\right| = k \succ 0$ τότε η εξίσωση γράφεται

ισοδύναμα: $4k + \dfrac{1}{k} = 2 \Leftrightarrow 4k^2 - 2k + 1 = 0$, Δ= $(-2)^2$-4.4=-12<0 Η λύση

$$k=\frac{2\pm i\sqrt{12}}{8}=\frac{2\pm i2\sqrt{3}}{8}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{z}{w}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\left|\frac{z}{w}\right|=\left|\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}\right|\Rightarrow\frac{1}{|w|}=\frac{2}{4}\Rightarrow|w|=2$$

ιι)AB=$|z-w|=\left|w(\frac{z}{w}-1)\right|=2\left|\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}-1\right|=2\left|\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{4}\right|=$

$$\frac{1}{2}.\sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$$

Τότε $AB^2+OA^2=\sqrt{3}^2+1^2=4=2^2=OB^2$ Άρα η γωνία A=90^0, και B=30^0 διότι η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας, άρα Γ=60^0

ιιι)Έστω f(x)=$|x.z+(1-x).w|-e^x$, $x\in[0,1]$ Η f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, f(0)=$|w|-e^0 2-1>0$, f(1)=1-e<0. Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και υπάρχει ένα ξ στο (0,1) τέτοιο ώστε

f(ξ)=0$\Rightarrow|\xi.z+(1-\xi)w|-e^{\xi}=0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2^{O} ΘΕΜΑ

i) Ισχύει $f^3(x)+f(x)+x=2008$ (1)

Έστω x_1, x_2 πραγματικά με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$

Ακόμα από την αρχική (1) παίρνουμε :

$f^3(x_1)+f(x_1)+x_1=2008$, $f^3(x_2)+f(x_2)+x_2=2008$. Οπότε έχουμε

$f^3(x_1)+f(x_1)+x_1=f^3(x_2)+f(x_2)+x_2\Rightarrow x_1=x_2$ Άρα η f είναι '1-1'

ιι)Θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφης

Θέτουμε f(x)=ψ τότε η(1) γίνεται $\psi^3+\psi+\chi=2008\Leftrightarrow\chi=-\psi^3-\psi+2008$

Άρα **$f^{-1}(x)=-x^3-x+2008$**. *<u>Πρέπει ακόμα για να είναι ορισμένη η αντίστροφη να βρούμε το πεδίο ορισμού της που είναι το πεδίο τιμών της f.</u>*

Έστω ένα τυχαίο ψ_0 τότε για $\chi_0=-\psi_0^3-\psi_0+2008$ από την (1) έχουμε

$$f^3(x_0)+f(x_0)=2008-x_0=2008-(-\psi_0^3-\psi_0+2008)=\psi_0^3+\psi_0\Leftrightarrow$$

$$f^3(x_0)-\psi_0^3+f(x_0)-\psi_0=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\left(f(x_0)-\psi_0\right).\left(f^2(x_0)+f(x_0)+\psi_0^2\right)\right]+\left(f(x_0)-\psi_0\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x_0)-\psi_0\right)\left(f^2(x_0)+f(x_0)+\psi_0^2+1\right)=0\Leftrightarrow\left(f(x_0)-\psi_0\right)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\psi_0$$

Άρα το πεδίο τιμών της f είναι το R. Οπότε $\underline{f(\Re)=\Re}$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=2008\Leftrightarrow f(2008)=0$

iii)

$$\lim_{x\to1}\frac{-x^3-x+2008-2006}{2008-x-2007}=\lim_{x\to1}\frac{-x^3-x+2}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1).(-x^2-x+2)}{-(x-1)}=4$$

ιν)Αρκεί να δείξουμε ότι : $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$

με x_0 τυχαίο πραγματικό ισχύει $f^3(x)+f(x)+x=2008$ και

$f^3(x_0)+f(x_0)+x_0=2008$

Με αφαίρεση κατά μέλη

$$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)+(x-x_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(f(x)-f(x_0)\right).\left(f^2(x)+f(x).f(x_0)+f^2(x_0)\right)\right]+f(x)-f(x_0)=-(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0).\left[\left(f^2(x)+f(x).f(x_0)+f^2(x_0)\right)+1\right]=-(x-x_0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{-(x-x_0)}{\left[\left(f^2(x)+f(x).f(x_0)+f^2(x_0)\right)+1\right]} \Leftrightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{-(x-x_0)}{\left[\left(f^2(x)+f(x).f(x_0)+f^2(x_0)\right)+1\right]}\right| \le \left|x-x_0\right|$$

Επειδή $\lim_{x\to x_0}\left|x-x_0\right|=0$ έπεται $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ Άρα η f είναι συνεχής στο R.

ιν) Αφού η f είναι συνεχής, θα είναι $\lim_{x\to 2008} f(x)=f(2008)=0$

Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται

$Z^{100}+z^{99}+z^{98}+\ldots+z+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{z^{101}-1}{z-1}=0$, το z=1δεν είναι λύση

Άρα $z^{101}=1 \Rightarrow \left|z^{101}\right|=1 \Rightarrow |z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow z.\bar{z}=1 \Rightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

Οπότε $z+\dfrac{1}{z}=z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z \in \Re$

Προτεινόμενα θέματα

ΘΕΜΑ Ι

1.Να λύσετε στο Cτην εξίσωση με άγνωστο το z

$$z^2-2(1+συν2t)z+2.(1+συν2t)=0, \qquad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Έστω z,w οι λύσεις αυτής με z η ρίζα της οποίας το φανταστικό μέρος είναι θετικό

2.Αν Μ είναι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, βρείτε το σύνολο (Ε) των σημείων του Μ όταν $t\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.Επίσης να βρείτε τον γ. τ. του w για το ίδιο t.

ΘΕΜΑ ΙΙ

Α.Έστω μια συνάρτηση f:[α,β]→R συνεχής κα γνησίως φθίνουσα στο [α,β]

Να αποδείξετε ότι:

$i)\ f^2(x)\le\left(f(a)+f(\beta)\right)f(x)-f(a).f(\beta)$

ιι) υπάρχει γ στο [α,β] τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f^2(\gamma) \le \frac{f^2(a)+f^2(\beta)}{2}$$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους της Γ΄τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ I

1.Να λύσετε στο C την εξίσωση με άγνωστο το z:

$$z^2\text{-}2(1+\text{συν}2t)z+2.(1+\text{συν}2t)=0, \qquad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Έστω z,w οι λύσεις αυτής με z η ρίζα της οποίας το φανταστικό μέρος είναι θετικό

2.Αν M είναι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, βρείτε το σύνολο (E) των σημείων του M όταν $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$. Επίσης να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w για το ίδιο t.

ΘΕΜΑ II

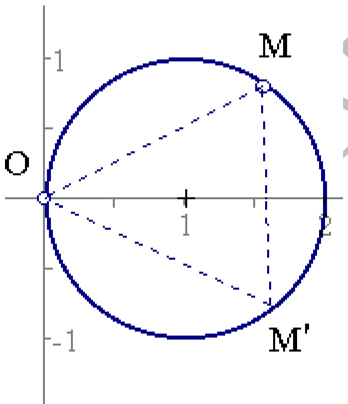
A.Έστω μια συνάρτηση f:[α,β]→R συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [α,β]
Να αποδείξετε ότι:

$i)\, f^2(x) \le \left(f(a)+f(\beta)\right)f(x) - f(a).f(\beta)$

ιι) υπάρχει γ στο[α,β] τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f^2(\gamma) \le \frac{f^2(a)+f^2(\beta)}{2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ



I)Δ=[-2(συν2t)]^2-4.2.(1+συν2t)= 4.(1+συν2t)(συν2t-1)=4(συν^{2}2t-1)=-4ημ^{2}2t<0

$$z, w = \frac{2.(1+\sigma\upsilon\nu 2t) \pm 2i\eta\mu 2t}{2} = (1+\sigma\upsilon\nu 2t) \pm i\eta\mu 2t$$

Άρα z=(1+συν2t)+i(ημ2t), w=(1+συν2t)-i(ημ2t) με $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ιι)Έστω χ+iy=1+συν2t+iημ2t, με χ,y πραγματικοί αριθμοί τότε
χ=1+συν2t, y=ημ2t άρα χ-1=συν2t, y=ημ2t οπότε **(χ-1)^2+y^2=1**

Όμως $\frac{\pi}{6} \le t < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \le 2t < \pi$, άρα το ημ2t$\in$ (0,1] επομένως **0<y**≤ 1

Επειδή $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ έχουμε

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \ge \sigma\upsilon\nu 2t > \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge \chi - 1 > -1 \Leftrightarrow 0 < \chi \le \frac{3}{2}$

Ο γεωμετρικός τόπος του z είναι το τόξο ΟΜ του κύκλου **$(\chi\text{-}1)^2+y^2=1$**

<u>Με εξαίρεση το Ο,</u> και Μ να είναι $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ο γεωμετρικός τόπος του w είναι το τόξο ΟΜ', συμμετρικότου τόξου ΟΜ ως προς τον χ΄χ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2^0 ΘΕΜΑ

Ι)Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha), \forall x \in [\alpha, \beta]$ Οπότε

$\big(f(x) - f(a)\big).\big(f(x) - f(\beta)\big) \le 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x) \le \big(f(a) + f(\beta)\big).f(x) - f(a).f(\beta)$ (1)

ιι)Είναι $f(\beta) < \frac{f(a) + f(\beta)}{2} < f(\alpha)$.Επειδή η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha) \ne f(\beta)$, σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των f(α) και f(β). Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει ένα σημείο γ στο [α,β] τέτοιο ώστε : $f(\gamma) = \frac{f(a) + f(\beta)}{2}$ (2)

Για χ=γ η (1) γίνεται $f^2(\gamma) \le \big(f(a) + f(\beta)\big)f(\gamma) - f(a).f(\beta)$ (3)

Η (3)από την (2) γίνεται

$f^2(\gamma) \le \big(f(a) + f(\beta)\big)\frac{f(a) + f(\beta)}{2} - f(a).f(\beta) \Leftrightarrow f^2(\gamma) \le \frac{f^2(a) + f^2(\beta)}{2}$

Προτεινόμενα θέματα

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f:[0,1]$\to$Rμε f(0)=f(1)

ι)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h με h(x)= $f(x + \frac{1}{\nu}) - f(x)$ με ν φυσικός μεγαλύτερος του 1

ιι)Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ$\in [0,1 - \frac{1}{\nu}]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{\nu})$

ΘΕΜΑ 1

Α.Αν $f'(x) = \eta\mu(\ln\frac{1}{\sqrt{x}})$, $e^{-\pi} < x < e^{\pi}$ και f αντιστρέψιμη με $f(e^{\pi/3}) = e^{\pi/4}$

να βρεθεί $(f^{-1})(e^{\pi/4})$.

Β.Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει $\ln|z| = 1 - |z|$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους
Της Γ΄τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ 1^0

.Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f:[0,1]→R με f(0)=f(1)

ι)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h με

h(x)= $f(x+\frac{1}{\nu})-f(x)$

με ν φυσικός μεγαλύτερος του 1

ιι)Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1-\frac{1}{\nu}]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{\nu})$

ΘΕΜΑ 2^0

Α.Αν $f'(x)=\eta\mu(\ln\frac{1}{\sqrt{x}})$, $e^{-\pi}<x<e^{\pi}$ και f αντιστρέψιμη με

$f(e^{\pi/3})=e^{\pi/4}$

να βρεθεί $(f^{-1})'(e^{\pi/4})$.

Β.Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει $\ln|z|=1-|z|$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1^0 ΘΕΜΑ

Έστω Α=[0,1], το D_f και g(x)=x+1/x με D_g=R τότε
Dfog=$\{x\in\Re / x\in D_g \kappa\alpha\iota g(x)\in D_f\}$ δηλαδή τους πραγματικούς όπου

$0\le x+\frac{1}{\nu}\le 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\nu}\le \chi \le 1-\frac{1}{\nu}$ άρα Dfog=$\left[\frac{-1}{\nu},1-\frac{1}{\nu}\right]$. Η h είναι

διαφορά δυο συναρτήσεων οπότε D_h= Dfog$\cap$ D_f =$\left[0,1-\frac{1}{\nu}\right]$

ii)Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)-f(x), x\in\left[0,1-\frac{1}{\nu}\right]=B$

Η h είναι συνεχής στο Β ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, θέτουμε στον τύπο της διαδοχικά χ=0, χ=1/ν, χ=2/ν, ……. χ=(ν-1)/ν και έχουμε αντίστοιχα

h(0)=f(1/ν)-f(0
h(1/ν)=f(2/ν)-f(1/ν),
……… ……………….
h(1-1/ν)=f(1)-f(1-1/ν)

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ισοτήτων (έχουμε τηλεσκοπικό άθροισμα)

h(0)+h(1/ν)+h(2/ν)+…+h(1-1/ν)=f(1)-f(0)=f(0)-f(0)=0 παίρνουμε

$$h(0)+h(\frac{1}{\nu})+h\left(\frac{2}{\nu}\right)+....+h\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=0 \quad (1)$$

<u>Διακρίνουμε περιπτώσεις</u>

1.Αν $h(0)=h(\frac{1}{\nu})=h\left(\frac{2}{\nu}\right)=....=h\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=0$ τότε η πρόταση (ιι) αληθεύει.

2.Αν υπάρχουν ετερόσημοι προσθετέοι στην (1), έστω h(k), h(m) με k,m$\in\left\{1,\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu},...\frac{\nu-1}{\nu}\right\}$, k<m. Τότε στο [k,m] h(k). h(m)<0 και η h ως συνεχής ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει ένα ξ στο (k,m)$\subseteq B$ τέτοιο ώστε

h(ξ)=0$\Leftrightarrow f(\xi+\frac{1}{\nu})=f(\xi)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2^0 ΘΕΜΑ

Α.Ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ με παραγώγιση

$$f'(f^{-1}(x)).(f^{-1}(x))'=1\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x)},x=e^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(e^{\frac{\pi}{4}})=\frac{1}{f'(f^{-1}(e^{\frac{\pi}{4}})}=\frac{1}{f'(e^{\frac{\pi}{3}})}=\frac{1}{\eta\mu\left(\ln\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{\pi}{3}}}}\right)}=-2$$

Β.Αρχικά $|z|>0$ Η δοσμένη εξίσωση γράφεται $\ln|z|+|z|-1=0$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση f(x)=lnx+x-1 με χ>0, τότε **f΄(χ)=1+1/χ>0** οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+00) και άρα "1-1"

Η (1) γράφεται $f(|z|)=f(1)\Rightarrow|z|=1$ άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο (0,0) και ακτίνα ρ=1.

Προτεινόμενα θέματα:

ΘΕΜΑ 1.Έστω f:IR$\rightarrow$ IR τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x)+(x-1)^2 f(x)=e^{x-1}-x\ln x-1,\ \forall x>0$. Αν $f(1)$ = -1 να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ(1, -1) είναι σημείο καμπής της c_f .

ΘΕΜΑ 2.Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] τρείς φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) τέτοια ώστε $f(a)\leq f(\beta)$ και υπάρχει γε(α,β) με f(γ)<f(α) να αποδείξετε ότι:

1. υπάρχει ξε(α,β) ώστε **f΄(ξ)=0**
2. υπάρχει χ_0ε(α,β) ώστε **f΄΄(χ_0)>0**
3. υπάρχουν ρ_1, ρ_2ε(α,β) ώστε $\rho_1<\rho_2$**, f΄΄(ρ_1)>0 και f΄΄(ρ_2)>0**
4. Αν η f " είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β], τότε υπάρχει ξ_0 στο (ρ_1, ρ_2)ώστε **f΄΄΄(ξ_0)<0**

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1. Έστω f: IR $\to$ IR τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x)+(x-1)^2 f(x)=e^{x-1}-x\ln x-1,\ \forall x>0$. Αν $f(1)=-1$ να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ(1, -1) είναι σημείο καμπής της c_f.

ΘΕΜΑ 2. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] τρείς φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) τέτοια ώστε $f(\alpha)\le f(\beta)$ και υπάρχει γε(α,β) με f(γ)<f(α) να αποδείξετε ότι:

1. υπάρχει ξε(α,β) ώστε $f'(\xi)=0$
2. υπάρχει χ_0ε(α,β ώστε $f''(\chi_0)>0$
3. υπάρχουν ρ_1, ρ_2ε(α,β) ώστε $\rho_1<\rho_2$, $f''(\rho_1)>0$ και $f''(\rho_2)>0$
4. Αν η f '' είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β], τότε υπάρχει ξ_0 στο (ρ_1, ρ_2)ώστε $f'''(\xi_0)<0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1^0 ΘΕΜΑ

Παραγωγίζουμε την δοσμένη σχέση και έχουμε

$f''(x)+2.(x-1)f(x)+(x-1)^2.f'(x)=e^{x-1}-\ln x-1$ **(1)** για χ=1

παίρνουμε **f''(1)=0**. Παραγωγίζουμε την (1) και χ=1 παίρνουμε

$$f'''(1)=2\succ 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f''(x)-f''(1)}{x-1}>0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{x-1}>0$$

<u>Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει δ>0 και οσοδήποτε μικρό τέτοιο ώστε για</u>

<u>κάθε</u> $x\in(1-\delta,1+\delta)-\{1\}$ να ισχύει $\dfrac{f''(x)}{x-1}>0$ **(2)**

Αν χ$\in(1-\delta,\delta)$ τότε χ-1<0 και η (2) δίνει f''(χ)<0, ενώ αν χ$\in(1,1+\delta)$

χ>1 οπότε από την (2) f''(χ)>0 Άρα η f''(χ) μηδενίζεται στο χ=1 και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1,επομένως το (1, f(1)) είναι σημείο καμπής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2^0 ΘΕΜΑ

1.Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής(Θ.Μ.Τ) στα [α,γ],[γ,β] υπάρχει ένα χ_1 στο (α,γ) και χ_2 στο (γ,β) τέτοια ώστε

$f'(x_1) = \dfrac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} < 0$ και $f'(x_2) = \dfrac{f(\beta) - f(\gamma)}{\gamma - \beta} > 0$. Η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\chi_1,\chi_2]$ και άρα υπάρχει ένα ξ στο (χ_1,χ_2) τέτοιο ώστε f'(ξ)=0

2.Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο $[\chi_1,\chi_2]$για την f ' και παίρνουμε ότι

υπάρχει ένα χ_0ε(χ_1,χ_2) τέτοιο ώστε $f''(x_0) = \dfrac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

3.Η f' ικανοποιεί το Θ.Μ.Τστα $[\chi_1,\xi]$, $[\xi,\chi_2]$υπάρχουν ρ_1 στο(χ_1,ξ)και

ρ_2 στο (ξ,χ_2) τέτοια ώστε $f''(\rho_1) = \dfrac{-f'(x_1)}{\xi - \rho_1} > 0$ και

$f''(\rho_2) = \dfrac{f''(x_2)}{x_2 - \xi} > 0$

4.Στο $[\rho_1, \rho_2]$ η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει ένα ξ_0 στο

(ρ_1,ρ_2) τέτοιο ώστε $f'''(\xi_0) = \dfrac{f''(\rho_2) - f''(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$<0 διότι

$f''(\rho_2) < f''(\rho_1)$

Προτεινόμενα θέματα

ΘΕΜΑ 1 Α.Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, +00) και για κάθε χ>α είναι $f'(x) \geq p > 0$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to +00} f(x) = +00$

Β.Αν η συνάρτηση f:R→R έχει δεύτερη παράγωγο στο R,στρέφει τα κοίλα άνω και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.

ΘΕΜΑ 2.Α.Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και f΄(χ)$\neq 0$ για κάθε χ στο Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Β.Έστω f μια άρτια συνάρτηση με την ιδιότητα f(0)=0.Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και η $f''(x) \neq 0, \forall x \in \Re$, να αποδείξετε ότι $f(x).f''(x) \geq 0$.

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1. Α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, +00) και για κάθε χ>α είναι $f'(x) \geq p > 0$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x-->+00} f(x) = +00$

Β.Αν η συνάρτηση f:R→R έχει δεύτερη παράγωγο στο R,στρέφει τα κοίλα άνω και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.

ΘΕΜΑ 2.Α.Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και f΄(χ)$\neq 0$ για κάθε χ στο Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ

Β.Έστω f μια άρτια συνάρτηση με την ιδιότητα f(0)=0.Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και η $f''(x) \neq 0, \forall x \in \Re$, να αποδείξετε ότι $f(x).f''(x) \geq 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω χ>α, στο διάστημα [α,χ] ισχύει το Θ.Μ.Τ,άρα υπάρχει ένα ξ_χ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_\chi) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \Rightarrow f(x) = f'(\xi_\chi)(x-a) + f(a)$. Όμως

f΄(χ) $\geq p > 0 \Rightarrow f'(\xi_\chi) \geq p \Rightarrow f'(\xi_\chi).(\chi-\alpha) \geq p(\chi-\alpha) \Rightarrow$
$f'(\xi_\chi).(\chi-\alpha) + f(a) \geq p(\chi-\alpha) + f(a) \Rightarrow f(x) \geq p(x-a) + f(a)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(p(x-a) + f(a)\right) = +\infty$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Β.Αφού η f στρέφει τα κοίλα άνω στο R η f΄ είναι γνησίως αύξουσα .

Η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ στο [χ,0]υπάρχει ένα ξ_1 τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(x)}{0-x}\Rightarrow f(x)=x.f'(\xi_1)+f(0)\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x.f'(\xi_1)+f(0)\right)=+\infty\Rightarrow f'(\xi_1)<0$$

Η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ στο [0,χ] υπάρχει ένα ξ_2 τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow f(x)=x.f'(\xi_2)+f(0)\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x.f'(\xi_2)+f(0)\right)=+\infty\Rightarrow f'(\xi_2)>0$$

Τότε στο $[\xi_1,\xi_2]$ η f' ικανοποιεί το θεώρημα του Bolzano και υπάρχει ένα ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.Αν χ>ξ τότε

$f'(x)>f'(\xi)=0\Rightarrow f'(x)>0$, ενώ αν

χ<ξ$\Rightarrow f'(x)<f'(\xi)\Rightarrow f'(x)<0$ Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι το f(ξ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 2

Α.Θα δείξω ότι η f΄ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Ας υποθέσουμε ότι δεν διατηρεί , τότε θα υπάρχουν α,β με α<β με f΄(α).f΄(β)<0. Έστω f΄(α)<0 και f΄(β)>0. Η f ως συνεχής θα παίρνει μια **ελάχιστη τιμή** στο $[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$ **τότε** υπάρχει δ>0 και οσοδήποτε μικρό

τέτοιο ώστε για κάθε χε (α.α+δ) να ισχύει

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0\Rightarrow f(a)>f(x)$ άρα η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο

στο **α.** Ομοίως δείχνουμε ότι η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο στο **β**.Τότε την ελάχιστη τιμή της ,η f θα την παίρνει σε εσωτερικό σημείο χ_0 του [α,β] και επειδή είναι παραγωγίσιμη, από θεώρημα Fermat $f΄(\chi_0)=0$ <u>άτοπο</u> Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ

Β. Από το (Α) η f΄ θα είναι γνησίως μονότονη στο R, επίσης θα είναι περιττή Ας υποθέσουμε ότι f΄΄(χ)>0 οπότε η f΄ γνησίως αύξουσα στοR

$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ τότε η f γνησίως αύξουσα στο

(0,+00), άρα $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ οπότε $f(x).f''(x) > 0, x > 0$

Ομοίως αν χ<0

Προτεινόμενα θέματα

ΘΕΜΑ 1. Δίνεται η

συνάρτηση $f(x) = \lim_{t \to -00} \dfrac{k.(x+3).e^{tx} + |x-1|.e^{-tx}}{2.e^{-tx} + e^{tx}}, x \in \Re$

να βρείτε τον τύπο της f και να προσδιορίσετε το k ώστε να είναι συνεχής στο $\Re$

ΘΕΜΑ 2. Έστω f: IR$\to$ IR δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η c_f εφάπτεται στον χ'χ άξονα στην αρχή των αξόνων. Αν f''(χ) < f'(χ) $\forall x \in IR$, να αποδειχτεί ότι

i) f'(x) > f(x) για χ < 0 και f'(χ) < f(χ) για χ > 0.

ii) $f(x) \leq 0$ $\forall$x $\in$ IR.

iii) Η c_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τον χ'χ εκτός από την αρχή των αξόνων.

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1 Δίνεται η

συνάρτηση $f(x) = \lim_{t \to -00} \dfrac{k.(x+3).e^{tx} + |x-1|.e^{-tx}}{2.e^{-tx} + e^{tx}}, x \in \Re$

να βρείτε τον τύπο της f και να προσδιορίσετε το k ώστε να είναι συνεχής στο $\Re$

ΘΕΜΑ 2. Έστω f: IR$\to$ IR δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η c_f εφάπτεται στον χ'χ άξονα στην αρχή των αξόνων. Αν f''(χ) < f'(χ) $\forall x \in IR$, να αποδειχτεί ότι

i) f'(x) > f(x) για χ < 0 και f'(χ) < f(χ) για χ > 0.

ii) $f(x) \le 0 \ \ \forall x \in IR$.

iii) Η c_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τον χ’χ εκτός από την αρχή των αξόνων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 1

Ισχύει $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t.x} = \begin{cases} 0, x>0 \\ 1, x=0 \\ +\infty, x<0 \end{cases}$ Η f κάνοντας πράξεις γράφεται

$$f(x) = \lim_{t\to-\infty} \frac{k.(x+3).e^{2tx} + |x-1|}{e^{2tx}+2} = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{2}, x>0 \\ \dfrac{3k+1}{3}, x=0 \\ k.(x+3), x<0 \end{cases}$$ για να είναι

συνεχής
στο R, θα πρέπει να είναι συνεχής και στο σημείο αλλαγής τύπου ,δηλαδή

$$\lim_{x\to o^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3k+1}{3} = 3k \Leftrightarrow k = 1/6$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 2

Ι)Έστω Η(χ)=f΄(χ)-f(χ) με f(0)=f΄(0)=0 και χ πραγματικό. Τότε
h΄(χ)=f΄΄(χ)-f΄(χ)<0, οπότε η h είναι φθίνουσα στο R

Αν χ>0 τότε H(x)<H(0)=0$\Rightarrow f'(x) - f(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < f(x)$

Αν χ<0 τότε Η(χ)>Η(0)=0$\Rightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > f(x)$

ιι)Αν χ>0 έχουμε

$$f'(x) - f(x) < 0 \Rightarrow f'(x).e^{-x} - f(x).e^{-x} < 0 \Rightarrow \left(f(x).e^{-x}\right)' < 0$$

Αν εκλέξουμε συνάρτηση g(x)=f(x).e^{-x} τότε g΄(χ)<0, οπότε η g είναι φθίνουσα
στο [0,+00), οπότε για χ>0 έχουμε g(x) <g(0)=>f(x).e^{-x}<0=>f(x)<0
Αν χ<0 έχουμε

$$f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow f'(x).e^{-x}.f(x).e^{-x} > 0 \Rightarrow \left(f(x).e^{-x}\right)' > 0$$

Τότε η συνάρτηση φ(x)=f(x).e^{-x} έχει παραγάγωγο θετική οπότε είναι γνησίως
αύξουσα στο (-00,0]. Για χ<0=>φ(χ)<φ(0)=>φ(χ)<0=>f(χ).$e^{-χ}$<0=> f(χ)<0

Άρα η f(x)$\le$0 για κάθε χ στο R

ιι)Από το παραπάνω ότι, f(x)<0 για κάθε χ στο R* ενώ f(0)=0, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται του χ΄χ στο (0,0)

Προτεινόμενα θέματα

ΘΕΜΑ 1.

Δίνεται η συνάρτηση f(χ)= $\frac{x}{\eta\mu\chi}, \chi \in (0,\pi)$ και 0<α<β<π/2

Α)Να μελετήσετε την μονοτονία της f στο (0,π)

Β)Να αποδείξετε: ι) $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} \prec \frac{\beta}{\alpha}$ ιι) $\frac{\beta}{a}.\frac{2}{\pi} \prec \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha}$

Γ.Να αποδείξετε την ανισότητα : $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx \prec \frac{\pi^2}{6}$

ΘΕΜΑ 2.

Έστω **z, w** μιγαδικοί αριθμοί που οι εικόνες τους δεν είναι συνευθειακά
σημεία με την αρχή των αξόνων.

Α.Να αποδείξετε ότι :

ι)δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε z=λ.w

ιι) $|z|^2 + |w|^2 \succ z.\overline{w} + \overline{z}.w$

Β Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}.|z.w|^2.x^3 - (z.\overline{w} + \overline{z}.w).x^2 + 4x$

ι)Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

ιι)Αν η **f''(1)=-2** να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την c_f τον χ΄χ και τις ευθείες χ=0 και χ=α όπου α θέση σημείου καμπής της f

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)= $\frac{x}{\eta\mu\chi}, \chi \in (0,\pi)$ και 0<α<β<π/2

Α)Να μελετήσετε την μονοτονία της f στο (0,π)

Β)Να αποδείξετε: ι) $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} \prec \frac{\beta}{\alpha}$ ιι) $\frac{\beta}{a}.\frac{2}{\pi} \prec \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha}$

Γ.Να αποδείξετε την ανισότητα : $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx \prec \frac{\pi^2}{6}$

ΘΕΜΑ 2. Έστω **z,w** μιγαδικοί αριθμοί που οι εικόνες τους δεν είναι συνευθειακά σημεία με την αρχή των αξόνων.

Α.Να αποδείξετε ότι :

ι)δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε z=λ.w

ii)$|z|^2 + |w|^2 \succ z.\overline{w} + \overline{z}.w$

B Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}.|z.w|^2.x^3 - (z.\overline{w} + \overline{z}.w).x^2 + 4x$

ι)Να αποδείξετε ότι η fείναι γνησίως αύξουσα

ιι)Αν η f''(1)=-2 ν α βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την c_f τον χ΄χ και τις ευθείες χ=0 και χ=α, όπου α θέση σημείου καμπής της f

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 1

Α.Είναι f΄(χ)=$\frac{\eta\mu\chi - \chi\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}$ Το πρόσημο της f΄(χ) εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή. Έστω λοιπόν g(x)=ημχ-χσυνχ τότε g΄(χ)=χημχ>0, για χ στο(0,π) άρα g΄(χ)>0 οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα[0,π).Για χ>0 έχουμε g(x)>g(0)=0=>g(x)>0=>ημχ-χσυνχ>0=>f΄(χ)>0, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,π)

Β.ι)Είναι 0<α<β<π/2 οπότε f(α)<f(β)=> $\frac{\alpha}{\eta\mu\alpha} < \frac{\beta}{\eta\mu\beta} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$

ιι)ισχύουν ημα<α και f(α)<f(π/2) οπότε έχουμε$\begin{cases} \eta\mu\alpha < \alpha \\ \frac{\beta}{\eta\mu\beta} \prec \frac{\pi/2}{\eta\mu\pi/2} \end{cases}$ με

πολλαπλασιασμό κατά μελη παίρνουμε $\beta\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} \prec \frac{\pi.\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{\pi.\alpha} \prec \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha}$

που είναι το ζητούμενο

Γ.Στο (0,π/2] έχουμε

f(x)<f(π/2)=>$\frac{\chi}{\eta\mu\chi} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\chi}{\eta\mu\chi} dx \prec \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\pi}{2} dx \Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\chi}{\eta\mu\chi} dx \prec \frac{\pi^2}{6}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 2

Α. ι) Ας υποθέσουμε ότι z=λ.w τότε η ισότητα διανυσματικά γράφεται $\overrightarrow{OM} = \lambda.\overrightarrow{OA}$,(Α,Μ οι εκόνες των z,w αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων) αυτό σημαίνει ότι οι εικόνες των μιγαδικών είναι συνευθειακά σημεία με το (0,0), το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση

ιι)$|z|^2 + |w|^2 \succ z.\overline{w} + \overline{z}.w$

$\Leftrightarrow z.\overline{z} + w.\overline{w} - z.\overline{w} - \overline{z}.w \Leftrightarrow \overline{z}(z-w) - \overline{w}(z-w) \Leftrightarrow (z-w).(\overline{z} - \overline{w})$

$\Leftrightarrow |z-w|^2 > 0$

Β.ι)Ηf είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

με $f'(x) = |z.w|^2.x^2 - 2(z.\overline{w} + \overline{z}w)x + 4$ η οποία έχει

Δ= $4.(z.\overline{w} + \overline{z}w)^2 - 16.|z.w|^2 = 4.(z.\overline{w} - \overline{z}.w)^2 < 0$ διότι η παρένθεση είναι φανταστικός αριθμός και στο τετράγωνο αρνητικός πραγματικός.Επίσης η **Δ** δεν μπορεί να είναι μηδέν, διότι οι μιγαδικοί αριθμοί z,w θα είχαν εικόνες συνευθειακά σημεία με την αρχή των αξόνων. Άρα f¨(χ)>0, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

ιι) $f''(x) = 2.|z.w|^2 x - 2(.z.\overline{w} + \overline{z}.w)$ (1) είναι f΄΄(1)=-2 επομένως παίρνουμε

$2.|z.w|^2 - 2(.z.\overline{w} + \overline{z}.w) = -2 \Rightarrow .|z.w|^2 - (.z.\overline{w} + \overline{z}.w) + 1 = 0$ **(2)** . Θέτουμε $z.\overline{w} = a + i\beta$ οπότε η **(2)**γίνεται $\alpha^2+\beta^2-2.\alpha+1=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow (\alpha=1$ και $\beta=0)$

τότε $z.\overline{w} = 1$και οτύπος της fείναι f(χ)=$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

Η f΄΄(χ)=2(χ-2) με f΄΄(1)=0.Αν χ>2 έχουμε f΄΄(χ)>0 ενώ για χ<2 είναι f΄΄(χ)<0 άρα το χ=2 είναι θέση σημείο καμπής

Το εμβαδόν είναι Ε=$\int_0^2 (\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x)dx = \left[\frac{x^4}{12} - 2\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = 4$

Προτεινόμενα θέματα

ΘΕΜΑ 1. Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R για τις οποίες ισχύει f(0)=0 ,

g(0)=1 και **z**= $f'(x) + i(f(x) + g(x))$ **w**= $g'(x) + i(-g(x) + f(x))$

μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:$|z-1| = |z-i|$ και

$|w-i| = |w+1|$

α)Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των w, z

β)Να δείξετε ότι $f(x) = e^x.\eta\mu\chi$ και $g(x) = e^x.\sigma\upsilon\nu\chi$

γ)Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο ξ στο (0,π/2) τέτοιο ώστε f(ξ)=g(ξ)

δ)Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathbf{c_f}$, $\mathbf{c_g}$ τον χ΄χ και τις ευθείες χ=0 και χ=π/2

ΘΕΜΑ 2. Θεωρούμε την συνάρτηση f: $\Re \rightarrow \Re$ που είναι

παραγωγίσημη στο R και ισχύει:

$$xf'(x) = (x+1)f(x), \forall x \in \Re^* \kappa\alpha\iota,\ f(1) = e,\ f(-1) = \frac{1}{e}.$$

Ι)Να βρεθεί η f.

ιι)Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου το οποίο ορίζεται από την f(x)=e^x τον ψ΄ψ και τις ευθείες ψ=1 και ψ=e

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ Ι

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στοR τέτοια ώστε για κάθε χ να ισχύει

$$\int_{x+1}^{x^2+x} f(t)dt \geq x^4 - 5x^2 + 4$$ Να αποδείξετε ότι :

ι) υπάρχει χ_0 στο (0,2)τέτοιο ώστε $f'(\chi_0)=0$
ιι) υπάρχει ξ στο (-2,6) τέτοιο ώστε f(ξ)=0

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω f συνεχής στο R και για κάθε χ ισχύει :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{f(t)}} dt$$

ι)Να δείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη της
ιι)Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη
ιιι)Να αποδείξετε ότι: f(0)+f(2008)<2f(1004)
ιv)Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x)dx$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1.Έστω συνάρτηση f(x)=/x.z+1/, όπου z είναι μη μηδενικός μιγαδικός
1)Αν η f είναι άρτια να δειχτεί ότι z είναι φανταστικός
2)Αν η πλάγια ασύμπτωτη της f στο + 00 περνά από το (0,1) να δειχτεί ότι ο z είναι πραγματικός
3)Αν $f(x) \leq e^{|z|.x}, x \in \Re$ να βρεθεί ο γ.τ των εικόνων του z, αν Rez>0
4)Αν η $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}$ είναι αρχική της 1/f(x) να βρεθεί ο z.

ΘΕΜΑ ΙΙ Α Να αποδειχτεί ότι : $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(a+\beta-x)dx$

Β. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon\phi^\rho \chi}{1+\varepsilon\phi^\rho \chi} dx$ ρ φυσικός

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

1.Έστω z=α+iβ, α,β πραγματικοί Είναι
f(x)=

$$|x.z+1| = \sqrt{x.(a+i\beta)+1} = \sqrt{(ax+1)^2 + \beta^2\chi^2} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\chi^2 + 2\alpha\chi + 1}$$

Η f είναι άρτια , άρα f(-x)=f(x)⇔ α=0, άρα ο z φανταστικός

2 .λ= $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{a^2+\beta^2+\frac{2\alpha}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}}{x} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$$\lim_{x\to+00}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+2\alpha\chi+1}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\chi=$$

$$\lim_{x\to+00}\frac{(a^2+\beta^2)x^2+2ax+1-(a^2+\beta^2)\chi^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+2\alpha\chi+1}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\chi}=$$

$$\lim_{x\to+00}\frac{x(2a+1/x)}{x\left(\sqrt{a^2+\beta^2+\frac{2\alpha}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Η ασύμπτωτη είναι ψ=$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\chi+\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.Αυτή διέρχεται από το (0,1)

Άρα $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}=1\Rightarrow\beta=0$,οπότε z=α≥ 0

3.Θεωρούμε την συνάρτηση

h(x)=$\sqrt{(a^2+\beta^2)\chi^2+2\alpha\chi+1}-e^{|z|x}\leq 0=h(0)$

Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ακρότατο στο 0 από θεώρημα Fermat h΄(0)=0. Είναι

$h'(x)=\dfrac{(a^2+\beta^2)\chi+\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+2\alpha\chi+1}}-|z|.e^{|z|x}$, για χ=0 έχουμε

$a-|z|=0\Rightarrow\Big|z=a\Rightarrow\sqrt{a^2+\beta^2}=\alpha\Rightarrow\beta=0\Big|$ Άρα ο γεωμετρικώς τόπος των εικόνων του z είναι ο άξονας των μη αρνητικών πραγματικών

4.Ισχύει

g΄(χ)=1/f(x)=>

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+\beta^2)\chi^2+2\alpha\chi+1}}\Rightarrow\chi^2+1=(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+2\alpha\chi+1$$

=> $\alpha^2+\beta^2=1$ και α.2=0. Άρα α=0 και (β=1 ή β=-1)Έτσι z=i, z=-i

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 2

Α..Θέτουμε α+β-χ=u=>dx=-du και για χ=α=>u=β, χ=β=>u=α

Άρα $\displaystyle\int_a^\beta f(a+\beta-\chi)dx=-\int_\beta^\alpha f(u)du=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Β.Από το (Α) για α=0, β= π/2 έχουμε

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{\varepsilon\phi^{\rho}\chi}{1+\varepsilon\phi^{\rho}\chi}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\varepsilon\phi^{\rho}(\frac{\pi}{2}-\chi)}{1+\varepsilon\phi^{\rho}(\frac{\pi}{2}-\chi)}dx\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\phi^{\rho}\chi}{1+\sigma\phi^{\rho}\chi}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{1}{\varepsilon\phi^{\rho}\chi}}{1+\frac{1}{\varepsilon\phi^{\rho}\chi}}dx=>\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\varepsilon\phi^{\rho}\chi}dx\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{\varepsilon\phi^{\rho}\chi}{1+\varepsilon\phi^{\rho}\chi}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\varepsilon\phi^{\rho}\chi}dx=\int_0^{\pi/2}1dx\Rightarrow 2\mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\mathrm{I}=\frac{\pi}{4}$$

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1.

Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R για τις οποίες ισχύει f(0)=0
και
g(0)=1και **z**= $f'(x)+i(f(x)+g(x))$ **w**= $g'(x)+i(-g(x)+f(x))$
μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει : $|z-1|=|z-i|$ και
$|w-i|=|w+1|$

α)Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των w, z

β)Να δείξετε ότι $f(x)=e^{x}.\eta\mu\chi$ και $g(x)=e^{x}.\sigma\upsilon\nu\chi$

γ)Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο ξ στο (0,π/2) τέτοιο ώστε f(ξ)=g(ξ)

δ)Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathbf{c_f}$, $\mathbf{c_g}$ τον χ΄χ και τις ευθείες χ=0 και χ=π/2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 1

α.Η σχέση $|z-1|=|z-i|$ εκφράζει την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα το Α(1,0) κα το Β(0, i), άρα είναι η ευθεία ψ=χ ενώ $|w-i|=|w+1|$ εκφράζει την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα Β(0,i) και Γ(-1,0)
οπότε είναι η ευθεία ψ=-χ

β. Από το (Α) έχουμε ψ=χ⇔ **f'(χ)=f(x)+g(x)** , ενώ ψ=-χ⇔ **g'(x)=g(x)-f(x)**

Θεωρούμε συνάρτηση **H(x)=(f(x)-e^{x}ημχ)^{2}+(g(x)-e^{x}συνχ)^{2}**, θα δείξουμε ότι είναι η σταθερή συνάρτηση 0 Πράγματι :

H'(x)=2.(f(x)-e^{x}.ημχ).(f'(χ)-e^{x}συνχ-e^{x}συνχ)+2(g(x)-e^{x}συνχ).(g'(χ)-e^{x}συνχ+e^{x}ημχ)=
=2.(f(x)-e^{x}.ημχ).(f(x)+g(x)-e^{x}ημχ-e^{x}συνχ)+2(g(x)-e^{x}συνχ).(g(x)-f(x)-e^{x}συνχ+e^{x}ημχ)=…

=…2[f(x)-e^xημχ$]^2$+[g(x)-e^xσυνχ$]^2$ Άρα Η'(χ)=2.Η(χ)⇔Η(χ)=c.e^{2x} .Επειδή Η(0)=0 έπεται ότι c=0, οπότε Η(χ)=0⇔**(f(x)-e^xημχ$)^2$+(g(x)-e^xσυνχ$)^2$**=0⇔(f(x)=e^x.ημχ καιg(x)=e^x.συνχ)

Παρατήρηση: ισχύει η **ισοδυναμία f'(χ)=κ.f(x)⇔f(x)=c.$e^{κ.x}$**

(<=)Αν f(x)= c.$e^{κ.x}$ τότε f'(χ)=κ.c.$e^{κχ}$ =κ.f(x)

(=>)Έστω f'(x)=k.f(x), τότε

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'(x)e^{kx} - f(x).k.e^{kx}}{\left(e^{kx}\right)^2} = \frac{k.f(x).e^{kx} - k.f(x).e^{kx}}{\left(e^{kx}\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{e^{kx}} = c \Rightarrow f(x) = c.e^{kx}$$

γ.Θεωρούμε την συνάρτηση φ(χ)=e^xημχ-e^x συνχ με χ να ανήκει στο[0,π/2]

Η φ είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και φ(0)=-1, φ(π/2)=$e^{π/2}$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος BOLZANO οπότε υπάρχει ένα ξ στο (0,π/2) τέτοιο ώστε φ(ξ)=0<=>f(ξ)=g(ξ)

Δ.Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E= \int_0^{\pi/2} \left| f(x) - g(x) \right| dx = \int_0^{\pi/2} \left| e^x \eta\mu\chi - e^x \sigma\upsilon\nu\chi \right| dx$$

$$= -\int_0^{\pi/4} e^x(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

Θα υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

Ι=$\int e^x(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)dx =$ e^x(ημχ-συνχ)-$\int e^x(\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi)$ dx= e^x(ημχ-συνχ)-{e^x(συνχ+ημχ)-$\int e^x(-\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)dx$} =

e^x(ημχ-συνχ)-e^x(συνχ+ημχ)-$\int e^x(-\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)dx$ =>Ι= e^x(ημχ-συνχ)-e^x(συνχ+ημχ)-Ι=>

2Ι= e^x(ημχ-συνχ)-e^x(συνχ+ημχ)=>**Ι=1/2[e^x(ημχ-συνχ)-e^x(συνχ+ημχ)]+C**

Τότε

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}\left\{\left[e^x.(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)\right]_0^{\pi/4} - \left[e^x(\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)\right]_0^{\pi/4}\right\} = \ldots\frac{1}{2}\left(2 - e^{\pi/4}.\sqrt{2}\right)$$

Το $\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\left\{\left[e^x.(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \left[e^x(\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right\} = \ldots\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$

Άρα Ε=$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4} = \sqrt{2}e^{\pi/4} - 1$

Προτεινόμενα θέματα

ΘΕΜΑ Ι

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στοR τέτοια ώστε για κάθε χ να ισχύει

$\int_{x+1}^{x^2+x} f(t)dt \geq x^4 - 5x^2 + 4$ Να αποδείξετε ότι :

ι) υπάρχει $χ_0$ στο (0,2)τέτοιο ώστε f΄($χ_0$)=0 ιι) υπάρχει ξ στο (-2,6) τέτοιο ώστε f(ξ)=0

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω f συνεχής στο R και για κάθε χ ισχύει :

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{f(t)}}\,dt$$

ι)Να δείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη της
ιι)Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη
ιιι)Να αποδείξετε ότι: f(0)+f(2008)<2f(1004)
ιν)Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x)dx$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Έστω f, g συναρτήσεις αντιστρέψιμες με σύνολο τιμών το R. Να αποδείξετε ότι:

i) fog αντιστρέψιμη

ii) $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

iii) Αν η f γνησίως αύξουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$

Απόδειξη

i) Έστω $x_1,x_2 \in D_{fog}$ με

$(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \Leftrightarrow f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right) \Leftrightarrow g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$

ii) Είναι $\left((fog)o(g^{-1}of^{-1})\right)(x)=\left(\left((fog)og^{-1}\right)of^{-1}\right)(x)=\left(\left(fo(gog^{-1})\right)of^{-1}\right)(x)$

$(fof^{-1})(x)=x$

Ομοίως $\left(\left(g^{-1}of^{-1}\right)o\left(fog\right)\right)(x)=x$

Άρα $\left(fog\right)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

iii) Έστω $f(x)=x$. Τότε $f^{-1}(x)=x$ (τετριμμένο)

Έστω $f^{-1}(x)=f(x)$ και ότι η $f\uparrow\mathbb{R}$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$:

$f(x_0)\neq x_0$ τότε

$f(x_0)>x_0$ ή $f(x_0)<x_0$

- Αν $f(x_0)>x_0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(f(x_0)\right)>f^{-1}(x_0) \Rightarrow$

$x_0 > f(x_0)$ άτοπο

- Αν $f(x_0) < x_0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(f(x_0)\right) < f^{-1}(x_0) \Rightarrow$

  $x_0 < f(x_0)$ άτοπο

Άρα $f(x_0) = x_0$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + i\delta$, $\gamma, \delta \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$

i) Αν $t \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τα οποία ισχύει

$z = z_1 + t \cdot z_2$

ii) Το ελάχιστο $|z|$

Λύση

i) Έστω $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$x + iy = a + i\beta + t \cdot (\gamma + i\delta) \Leftrightarrow$

$x + iy = (a + t\gamma) + i \cdot (\beta + t\delta)$

Η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με $\begin{cases} x = a + t \cdot \gamma \\ y = \beta + t \cdot \delta \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{x-a}{\gamma} = t \text{ και } \dfrac{y-\beta}{\delta} = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Οπότε παίρνουμε $\dfrac{x-a}{\gamma} = \dfrac{y-\beta}{\delta} \Leftrightarrow$

$\delta(x-a) = \gamma(y-\beta) \Leftrightarrow \delta x - a\delta = \gamma y - \beta\gamma \Leftrightarrow$

$\delta x - \gamma y + (\beta\gamma - \alpha\delta) = 0$

Η τελευταία σχέση είναι εξίσωση πρώτου βαθμού και παριστάνει ευθεία που διέρχεται από το Α(α,β).

ii) $|z| = d(0, \varepsilon) = \dfrac{|\beta\gamma - \alpha\delta|}{\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}}$

Προτεινόμενα θέματα των οποίων η λύση θα δημοσιευθεί

ΘΕΜΑ Ι

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$

i) Να προσδιορίσετε την

$g = \overbrace{fofo...of}^{\nu \text{ συνθέσεις}}$ και την g^{-1}

ii) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε να ισχύει

$f(1-x) + f(x) + f^{-1}(1+x) = x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Να αποδείξετε ότι

i) Η f γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πεδίο τιμών της

ii) Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

iii) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

iv) Να βρείτε $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^m |f(x) - g(x)|\,dx$

Τι εκφράζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα;

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Έστω $f: R \to R$ με $f(x) = ax + \beta$ $(\alpha, \beta \in R,\ \alpha \neq 0)$

iii) Να προσδιορίσετε την

$g = \overbrace{fofo...of}^{\nu \text{ συνθέσεις}}$ και την g^{-1}

iv) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε να ισχύει

$f(1-x) + f(x) + f^{-1}(1+x) = x\,,\ \forall x \in R$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Να αποδείξετε ότι

v) Η f γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πεδίο τιμών της

vi) Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

vii) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

viii) Να βρείτε $\lim\limits_{m\to+\infty}\int_0^m \left| f(x)-g(x)\right| dx$

Τι εκφράζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

i) Το $D_f = R$: $D_{gog} = \{x \in R / x \in D_g \ , g(x) \in R\} = R$

ορίζεται η σύνθεση fof με τύπο

$$g_1(x) = (fof)(x) = f\left(f(x)\right) = a(ax+\beta)+\beta =$$

$$= \alpha^2 x + a\beta + \beta = a^2 x + \beta(\alpha+1)$$

Ορίζεται

$g_2 = g_1 of$ με τύπο $g_2(x) = (g_1 of)(x) =$

$$= g_1\left(f(x)\right) = a^2(ax+\beta) + \beta(a+1) =$$

$$= a^3 x + a^2\beta + \beta(\alpha+1) =$$

$= a^3 x + \beta(a^2+a+1)$ Δηλαδή

$$(fofof)(x) = a^3 x + \beta(a^2+a+1)$$

Ισχυριζόμαστε ότι:

$$g(x) = (\overbrace{fofo...of}^{\nu})(x) = a^{\nu} x + \beta(a^{\nu-1} + a^{\nu-2} + ... + a + 1)$$

Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας με Μαθηματική Επαγωγή

Για $\nu = 2$

$(fof)(x) = a^2 x + \beta a + \beta$ αληθής

Έστω ότι ισχύει για $\nu = \kappa$, όπου κ αυθαίρετος φυσικός

$$g_{\kappa}(x) = (\overbrace{fofo...of}^{\text{k}})(x) = a^{\kappa} x + \beta(a^{\kappa-1} + a^{\kappa-2} + ... + a + 1)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$

Δηλαδή

$$g_{\kappa+1}(x) = \left((fofo...of)of\right)(x) = a^{\kappa+1} x + \beta(a^{\kappa} + a^{\kappa-1} + ... + a + 1)$$

Πράγματι

$$g_{\kappa+1}(x)=(g_\kappa o f)(x)=g_\kappa(f(x))=a^\kappa(\alpha x+\beta)+\beta(a^{\kappa-1}+\ldots+a+1)=$$

$$=\alpha^{\kappa+1}x+\beta(a^\kappa+a^{\kappa-1}+\ldots+a+1)$$

Άρα $g(x)=a^\nu x+\beta(a^{\nu-1}+a^{\nu-2}+\ldots+a+1)$

Η g είναι πολυωνυμική συνάρτηση 1^{ου} βαθμού και είναι “1-1”. Άλλωστε αν $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

Θέτουμε $g(x)=y\Leftrightarrow$

$$a^\nu x+\beta(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}+\ldots+\alpha+1)=y\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{y-\beta(a^{\nu-1}+a^{\nu-2}+\ldots+a+1)}{a^\nu}$$

Άρα

$$g^{-1}(x)=\frac{x-\beta(a^{\nu-1}+a^{\nu-2}+\ldots+a+1)}{a^\nu},\ x\in R$$

ii) $f(1-x)+f(x)+f^{-1}(1+x)=x$, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-\beta}{\alpha}$

$$a(1-x)+\beta+ax+\beta+\frac{1+x-\beta}{a}=x\Leftrightarrow$$

$(a^2+2a\beta+1-\beta)+x=0+ax$ για κάθε x

Άρα $\left(a=1 \text{ και } a^2+2a\beta+1-\beta=0\right)$ οπότε $a=1,\ \beta=-2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ ΙΙ

i) $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ άρα η $f\uparrow R$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=-\infty$$

Άρα $f(R)=R$

ii) Η f ως μονότονη είναι “1-1”, άρα αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=y\Leftrightarrow$

$$e^x-\frac{1}{e^x}-2y=0\Leftrightarrow(e^x)^2-2ye^x-1=0\xrightarrow{\Delta>0}$$

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Οπότε $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ \ x \in R$

iii) $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx =$

$$= \left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x\cdot x}{2\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)' x dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,x' dx \Leftrightarrow$$

$$I = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - I \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

iv) $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^m |f(x) - g(x)|\,dx = \lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^m e^{-x}dx = \lim\limits_{m\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^m = \lim\limits_{m\to+\infty}\left[-e^{-m}+1\right] = 1$

Εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ c_f, c_g και τον y΄y.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ I

i) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = x$

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο $e^{|z|-1} = |z|$

iii) Να βρείτε την $f: \int_0^1 e^{xf(x)-1}dx = x\cdot f(x)$, όπου f συνεχής με $x > 0$.

ΘΕΜΑ II

Έστω οι z, w μιγαδικοί με εικόνες A, B στο μιγαδικό επίπεδο. Αν $(\text{AB}) = (\text{AO})$, O η αρχή των αξόνων και $z \neq 0$ να βρείτε $t > 0$ για το οποίο $w = z\cdot(1+it)$. Να αποδείξετε επίσης ότι το AOB είναι ορθογώνιο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

iv) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = x$

v) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο $e^{|z|-1} = |z|$

vi) Να βρείτε την $f : \int_0^1 e^{xf(x)-1}dx = x \cdot f(x)$, όπου f συνεχής με $x > 0$.

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω οι z, w μιγαδικοί με εικόνες Α, Β στο μιγαδικό επίπεδο. Αν $(\text{AB}) = (\text{AO})$, Ο η αρχή των αξόνων και $z \neq 0$ να βρείτε $t > 0$ για το οποίο $w = z \cdot (1 + it)$. Να αποδείξετε επίσης ότι το ΑΟΒ είναι ορθογώνιο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

i) $e^{x-1} = x \Leftrightarrow \ln e^{x-1} = \ln x$, $x > 0$ άρα

$\ln x = x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 = 0$ (1)

Μια προφανής λύση είναι $x = 1$

Έστω $f(x) = \ln x - x + 1$, $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Η f στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 0$ άρα η (1) είναι ισοδύναμη $f(x) = 0$, η οποία έχει μοναδική λύση $x = 1$.

ii) $e^{|z|-1} = |z| \Leftrightarrow \ln|z| = |z| - 1 \Leftrightarrow \ln|z| - |z| + 1 = 0$

$\Leftrightarrow f(|z|) = 0 \Leftrightarrow f(|z|) = f(1) \Leftrightarrow |z| = 1$

Ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 1.

iii) Θέτουμε $\int_0^1 e^{xf(x)-1}dx = c$ (2)

Τότε η αρχική γίνεται $c \cdot x = f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{c}{x}$ (3)

Η (2) $\int_0^1 e^{c-1}dx = c \Rightarrow e^{c-1} = c$ με $c>0$ άρα $\ln c - c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1$

Οπότε $f(x) = \dfrac{1}{x}$

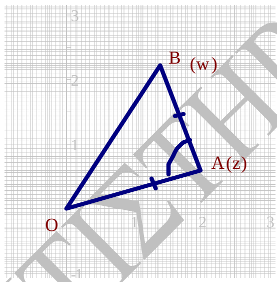
ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ ΙΙ

$(\mathrm{AB}) = (\mathrm{AO}) \Leftrightarrow |z-w| = |z| \Leftrightarrow |z| = |z - z\cdot(1+it)| \Leftrightarrow$

$|z| = |izt| \Leftrightarrow |z| = |z|\cdot|t| \Leftrightarrow |t| = 1 \Leftrightarrow t = 1$

Οπότε

$w = z\cdot(1+i)$



$\mathrm{OB} = |w| = |z||1+i| = |z|\cdot\sqrt{2}$

$\mathrm{AB} = |z-w| = |z||i| = |z| = \mathrm{OA}$

Τότε $(\mathrm{OA})^2 + (\mathrm{AB})^2 = |z|^2 + |z|^2 = 2|z|^2 = \mathrm{OB}^2$

Άρα το ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Α.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ Ι

Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$ με $f(-1)=1$ και $\int [f(x)-1]f'(x)dx = 2x^4 + c$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = z(x) = 2\sqrt{x} + ie^x$, $x \geq 0$

α) Να βρεθεί αυτός του οποίου η εικόνα απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου

β) Να δειχθεί ότι οι εικόνες των $w = \dfrac{4+zi}{z-3i}$ βρίσκονται εντός του κύκλου κέντρου $K(i)$ και ακτίνας $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$ με $f(-1)=1$ και $\int [f(x)-1]f'(x)dx = 2x^4 + c$ (1)

ΘΕΜΑ ΙΙ

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = z(x) = 2\sqrt{x} + ie^x$, $x \geq 0$

α) Να βρεθεί αυτός του οποίου η εικόνα απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου

β) Να δειχθεί ότι οι εικόνες των $w = \dfrac{4+zi}{z-3i}$ βρίσκονται εντός του κύκλου κέντρου $K(i)$ και ακτίνας $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

Θέτουμε $f(x) = u$ τότε $du = f'(x)dx$ και η αρχική ισότητα γίνεται

$$\int (u-1)du = 2x^4 + c \Rightarrow \frac{u^2}{2} - u = 2x^4 + c \Rightarrow$$

$$u^2 - 2u - 4x^4 - 2c = 0$$

Άρα $f^2(x) - 2f(x) - 4x^4 - 2c = 0$ (2)

Για $x = -1$: $f^2(-1) - 2f(-1) - 4 - 2c = 0 \Rightarrow$

$$1 + 2 - 4 - 2c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Οπότε η (2): $f^2(x) - 2f(x) - 4x^4 - 2c = 0$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με $\Delta = 16x^4 \geq 0$ άρα $f(x) = -2x^2 + 1$ ή $f(x) = 2x^2 + 1$

Επειδή $f(-1) = -1$ έχουμε $f(x) = -2x^2 + 1$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ ΙΙ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |z(x)| = \sqrt{4x + e^{2x}}$, $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{4 + 2e^{2x}}{2\sqrt{4x + e^{2x}}} = \frac{2 + e^{2x}}{\sqrt{4x + e^{2x}}} > 0 \text{ άρα η } f \uparrow [0, +\infty]$$

Η ελάχιστη τιμή της είναι $f(0) = 1$. Ο μιγαδικός με την μικρότερη απόσταση, από την αρχή των αξόνων είναι για $x = 0$, ο $z = i$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$|w - i| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left|\frac{4+zi}{z-3i} - i\right| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z-3i}\right| < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow |z - 3i| > \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x + (e^x - 3)^2 > 3$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 4x + (e^x - 3)^2$, $x \geq 0$ με $g'(x) = 4 + 2(e^x - 3)e^x$,

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^{x}+2=0 \Leftrightarrow (e^{x}-1)(e^{x}-2)=0 \Leftrightarrow (e^{x}=1 \text{ ή } e^{x}=2)$

$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=\ln 2)$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
g'	-	0	+
g	$\searrow$		$\nearrow$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ln 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$

Στο $x=\ln 2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με τιμή $g(\ln 2)=4\ln 2+(e^{\ln 2}-3)^2=4\ln 2+1$

Είναι $4\ln 2+1>3 \Leftrightarrow 4\ln 2>2 \Leftrightarrow \ln 4>1$ (αφού $4>e$)

Άρα $g(\ln 2)>3 \Leftrightarrow g(x)>3 \Leftrightarrow |w-i|<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ Ι

Έστω f συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(0)>0$ και για κάθε x στο R ισχύει

$\left(f'(x)\right)^2+2f'(x)=e^{x}-x+2$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f γνησίως αύξουσα

β) η f παρουσιάζει καμπή στο 0

γ) $f(1)\geq 1+f(0)$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω $z\in C$ και η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{zi}{|z-i|-|z+i|}$

α) Να βρείτε για ποιους μιγαδικούς ορίζεται η f

β) Να αποδείξετε ότι $|f(z)|\geq \dfrac{1}{2}$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τους οποίους ισχύει

$|f(z)|=\dfrac{|z|}{2}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Έστω f συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(0)>0$ και για κάθε x στο R ισχύει

$\left(f'(x)\right)^2+2f'(x)=e^x-x+2$ (1)Να αποδείξετε ότι:

α) η f γνησίως αύξουσα β) η f παρουσιάζει καμπή στο 0

γ) $f(1)\geq 1+f(0)$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω $z\in C$ και η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{zi}{|z-i|-|z+i|}$ (1)

α) Να βρείτε για ποιους μιγαδικούς ορίζεται η f

β) Να αποδείξετε ότι $|f(z)|\geq\dfrac{1}{2}$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τους οποίους ισχύει $|f(z)|=\dfrac{|z|}{2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x)=e^x-x+2$ με πεδίο ορισμού το R.

Τότε $\phi'(x)=e^x-1$, $\phi'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, ενώ $\phi'(x)>0\Leftrightarrow x>0$, $\phi'(x)<0\Leftrightarrow x<0$

Άρα στο $x=0$ η φ παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) με $\phi(0)=3$. Άρα $\phi(x)\geq 3$ για κάθε $x\in R$. Η (Ι) γίνεται $\left(f'(x)\right)^2+2f'(x)\geq 3\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)^2+2f'(x)-3\geq 0\Leftrightarrow$

$\left(f'(x)+3\right)\left(f'(x)-1\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(f'(x)\leq -3 \text{ ή } f'(x)\geq 1\right)$ (ΙΙ) για κάθε x.

Η f' είναι συνεχής, άρα το πεδίο τιμών της είναι διάστημα: Επειδή $f'(0)>0$ από (ΙΙ) παίρνουμε $f'(x)\geq 1$ (ΙΙΙ)Είναι $f'(x)\geq 1>0\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα

β) Παραγωγίζουμε την (Ι) $2f'(x)f''(x)+2f''(x)=e^x-1$, $f''(x)\left[2f'(x)+2\right]=e^x-1$

$f''(x)=\dfrac{e^x-1}{2f'(x)+2}$ Τότε $f''(0)=\dfrac{e^0-1}{2f'(0)+2}=0$, ενώ

$f''(x)>0\Leftrightarrow x>0$, $f''(x)<0\Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩		∪

Σ.Κ(0, $f(0)$)

γ) Από (ΙΙΙ) $\int_0^1 f'(x)dx \geq \int_0^1 1dx \Leftrightarrow \left[f(x) \right]_0^1 \geq 1 \Leftrightarrow f(1) - f(0) \geq 1 \Leftrightarrow f(1) \geq 1 + f(0)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ ΙΙ

α) Πρέπει $|z-i| - |z+i| \neq 0$

Αν $|z-i| - |z+i| = 0 \Leftrightarrow |z-i| = |z+i|$

Άρα η εικόνα του z, ανήκει στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος, με άκρα $i, -i$ δηλαδή ο άξονας των πραγματικών.

Η f ορίζεται στο C – R.

β) $|f(z)| = \left| \dfrac{zi}{|z-i| - |z+i|} \right| = \dfrac{|z||i|}{\left||z-i| - |z+i|\right|} = \dfrac{|z|}{\left||z-i| - |z+i|\right|}$

Όμως $\left||z-i| - |z+i|\right| \leq |z-i+(z+i)| = |2z| = 2|z| \Leftrightarrow$

$\left||z-i| - |z+i|\right| \leq 2|z| \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{|z|}{\left||z-i| - |z+i|\right|} \Leftrightarrow f(z) \geq \dfrac{1}{2}$

γ) $|f(z)| = \dfrac{|z|}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|z|}{\left||z-i| - |z+i|\right|} = \dfrac{|z|}{2} \Leftrightarrow \left||z-i| - |z+i|\right| = 2$

Επειδή $|i-(-i)| = 2$ η τελευταία σχέση εκφράζει 2 ημιευθείες στο Ι με αρχή το i και -i

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ Ι

Α. Έστω f ορισμένη στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη σ’ αυτό και $f'(a) < 0 < f'(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

Β. Έστω f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[-2009, 2009]$ με $f'(-2009) < -2009$ και $f'(2009) > 2009$. Δίνεται μιγαδικός $z : x + f^3(x) + f^2(x) = |z-3-4i|x$. Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο του z.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Α. Έστω f ορισμένη στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη σ’ αυτό και $f'(a) < 0 < f'(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

Β. Έστω f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[-2009, 2009]$ με $f'(-2009) < -2009$ και $f'(2009) > 2009$. Δίνεται μιγαδικός $z: x + f^3(x) + f^2(x) = |z - 3 - 4i|x$. Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο του z.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

Α. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$, θα είναι και συνεχής. Άρα θα παίρνει μια **μέγιστη τιμή** M_1 και μια **ελάχιστη** μ_1. Είναι $f'(a) < 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$.

Θα υπάρχει $\delta > 0$ (οσοδήποτε μικρό) τέτοιο ώστε $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ για κάθε $x \in (a, a + \delta)$, άρα $f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a)$.

Άρα το $f(a)$ δεν είναι η ελάχιστη τιμή της f στο $[a, \beta]$.

Ομοίως $f'(\beta) > 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \beta^-} \dfrac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} > 0$ θα υπάρχει $\kappa > 0$: $\dfrac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} > 0$, για κάθε $x \in (\beta - \kappa, \kappa)$, άρα $f(x) - f(\beta) < 0 \Rightarrow f(x) < f(\beta)$, άρα ούτε το $f(\beta)$ είναι ελάχιστη τιμή της f στο $[a, \beta]$.

Η f θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή σε $x_0 \in (a, \beta)$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη από Θ. Fermat: $f'(x_0) = 0$.

Β. Έχουμε $f'(-2009) < 0 < f'(2009)$.

Από (Α) θα υπάρχει $x_0 \in (-2009, 2009)$: $f'(x_0) = 0$

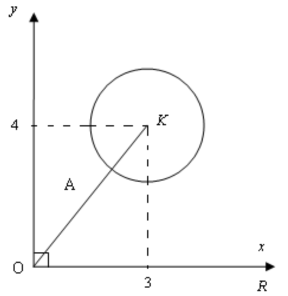
Παραγωγίζοντας την δοσμένη σχέση:

$1 + 3f^2(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) = |z - 3 - 4i|$

Για $x = x_0$ στην τελευταία:

$|z - 3 - 4i| = 1 \Leftrightarrow |z - (3 + 4i)| = 1$

Ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με $K(3,4)$, $\rho = 1$



$\text{mim}|z| = OK - K\mathrm{A} = 5 - 1 = 4$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ Ι

Έστω το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_\nu = \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx,\ \nu \in \mathrm{N}$

i) Να δείξετε ότι $\mathrm{I}_\nu = \dfrac{\nu - 1}{\nu}\mathrm{I}_{\nu-2},\ \nu \geq 2$

ii) α) Αν ν άρτιος $I_\nu = \frac{(\nu-1)(\nu-3)...1}{\nu(\nu-2)...2}\cdot\frac{\pi}{2}$

β) Αν ν περιττός $I_\nu = \frac{(\nu-1)(\nu-3)...2}{\nu(\nu-2)...3}$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω $\alpha > 0$, x πραγματικό και $z = 1 + ia^{n+x}$, $w = (1+n+x)+i$

Αν για κάθε x, ισχύει $|\overline{z}-w| \le |z+\overline{w}|$ να δείξετε ότι $a = e$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Έστω το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx,\ \nu \in N$

iii) Να δείξετε ότι $I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$, $\nu \ge 2$

iv) α) Αν ν άρτιος $I_\nu = \frac{(\nu-1)(\nu-3)...1}{\nu(\nu-2)...2}\cdot\frac{\pi}{2}$

v) β) Αν ν περιττός $I_\nu = \frac{(\nu-1)(\nu-3)...2}{\nu(\nu-2)...3}$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω $\alpha > 0$, x πραγματικό και $z = 1 + ia^{\eta\mu x}$, $w = (1+\eta\mu x)+i$

Αν για κάθε x, ισχύει $|\overline{z}-w| \le |z+\overline{w}|$ να δείξετε ότι $a = e$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

i) $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x \cdot d(\eta\mu x) =$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x \cdot \eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \cdot (\nu-1)\sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x(-\eta\mu x)dx =$$

$$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\nu-1)\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\eta\mu^2 x dx = (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)dx =$$

$$= (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x - \sigma\upsilon\nu^\nu x)dx = (\nu-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx\right]$$

$$\Rightarrow I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2} - (\nu-1)I_\nu \Rightarrow I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2},\ \nu \ge 2$$

ii) α) Αν ν άρτιος, εφαρμόζουμε τον αναγωγικό τύπο διαδοχικά $\nu, \nu-2, \nu-4 ... 2$

$\mathrm{I}_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}\mathrm{I}_{\nu-2}$, $\mathrm{I}_{\nu-2} = \dfrac{\nu-3}{\nu-2}\mathrm{I}_{\nu-4}$, …, $\mathrm{I}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_0$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη: $\mathrm{I}_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}\cdot\dfrac{\nu-3}{\nu-2}\cdots\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_0$

Όμως $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \dfrac{\pi}{2}$.

Άρα $\mathrm{I}_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}\cdot\dfrac{\nu-3}{\nu-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(\nu-1)(\nu-3)...1}{\nu(\nu-2)...2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

β) Αν ν περιττός, εφαρμόζουμε τον αναγωγικό τύπο για $\nu, \nu-2, \nu-4 ... 3$

$\mathrm{I}_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}\mathrm{I}_{\nu-2}$, $\mathrm{I}_{\nu-2} = \dfrac{\nu-3}{\nu-2}\mathrm{I}_{\nu-4}$, $\mathrm{I}_{\nu-4} = \dfrac{\nu-5}{\nu-4}\mathrm{I}_{\nu-6}$, …, $\mathrm{I}_3 = \dfrac{2}{3}\mathrm{I}_1$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη: $\mathrm{I}_\nu = \dfrac{(\nu-1)(\nu-3)...2}{\nu(\nu-2)...3}\cdot\mathrm{I}_1$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Άρα $\mathrm{I}_\nu = \dfrac{(\nu-1)(\nu-3)...2}{\nu(\nu-2)...3}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ ΙΙ

Από την $|\bar{z} - w| \le |z + \bar{w}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|1 + ia^{\eta\mu x} - \left[(1+\eta\mu x) + i\right]\right| \le \left|1 + ia^{\eta\mu x} + (1+\eta\mu x) - i\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|1 - ia^{\eta\mu x} - 1 - \eta\mu x - i\right| \le \left|(2+\eta\mu x) + i\left(a^{\eta\mu x} - 1\right)\right| \Leftrightarrow$

$\left|(-\eta\mu x) - i\left(a^{\eta\mu x} + 1\right)\right| \le \left|(2+\eta\mu x) + i\left(a^{\eta\mu x} - 1\right)\right| \Leftrightarrow$

$\sqrt{\eta\mu^2 x + \left(a^{\eta\mu x} + 1\right)^2} \le \sqrt{(2+\eta\mu x)^2 + \left(a^{\eta\mu x} - 1\right)^2} \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x + a^{2\eta\mu x} + 2a^{\eta\mu x} + 1 \le 4 + \eta\mu^2 x + 4\eta\mu x + a^{2\eta\mu x} - 2a^{\eta\mu x} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^{\eta\mu x} - 4\eta\mu x - 4 \le 0 \Leftrightarrow a^{\eta\mu x} - \eta\mu x - 1 \le 0$ (I)

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = a^{\eta\mu x} - \eta\mu x - 1 \le 0$ με $f(0) = 0$. Η (I) γράφεται $f(x) \le f(0)$. Στο $x = 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επειδή είναι παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα Fermat, $f'(0) = 0$.

$f'(x) = a^{\eta\mu x}\cdot\ln a\cdot\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x$,

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^{\eta\mu 0}\cdot\ln a\cdot\sigma\upsilon\nu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ Ι

Έστω συνάρτηση f με $f(x) = e^{ax}\cdot\left(x^2 + a^2\right)^{-1}, a \ne 0$

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

ii) Να δείξετε ότι για $a \ge 1$ ισχύει η ανισότητα $e^{ax} > 1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, $x > 0$

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της $f'(x)=0$, να υπολογίσετε το

όριο $\lim\limits_{a\to 0}\left(\dfrac{1+x_1\cdot x_2}{1-x_1\cdot x_2}\right)^{\frac{(x_1+x_2)^2}{4}}$

iv) Να βρείτε μια αρχική συνάρτηση της $\phi(x)=\left(x^2+a^2\right)f(x)\cdot \eta\mu x$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{3}{2}$

i) Να δείξετε $2|z|\geq 1$

ii) Να βρείτε τον z_0, που έχει το μικρότερο μέτρο

iii) Να δείξετε ότι: $4{z_0}^4+4{z_0}^3+{z_0}^2+z_0=0$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους
της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Έστω συνάρτηση f με $f(x)=e^{ax}\cdot\left(x^2+a^2\right)^{-1}, a\neq 0$

v) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

vi) Να δείξετε ότι για $a\geq 1$ ισχύει η ανισότητα $e^{ax}>1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, $x>0$

vii) Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της $f'(x)=0$, να υπολογίσετε το

όριο $\lim\limits_{a\to 0}\left(\dfrac{1+x_1\cdot x_2}{1-x_1\cdot x_2}\right)^{\frac{(x_1+x_2)^2}{4}}$

viii) Να βρείτε μια αρχική συνάρτηση της $\phi(x)=\left(x^2+a^2\right)f(x)\cdot \eta\mu x$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{3}{2}$

i) Να δείξετε $2|z|\geq 1$

ii) Να βρείτε τον z_0, που έχει το μικρότερο μέτρο

iii) Να δείξετε ότι: $4{z_0}^4+4{z_0}^3+{z_0}^2+z_0=0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Ι

i) Είναι $f(x)=\dfrac{e^{ax}}{x^2+a^2}$, $a\neq 0$

$$f'(x)=\frac{\left(e^{ax}\right)'\left(x^2+a^2\right)-e^{ax}\left(x^2+a^2\right)'}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{ae^{ax}\left(x^2+a^2\right)-e^{ax}\cdot 2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{ax}\left[a\left(x^2+a^2\right)-2x\right]}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{e^{ax}\left[ax^2-2x+a^3\right]}{\left(x^2+a^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{ax}\left(ax^2-2x+a^3\right)=0\Leftrightarrow ax^2-2x+a^3=0 \quad \text{(I)}$$

$$\Delta=\beta^2-4a\gamma=(-2)^2-4aa^3=4(1-a^4)$$

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1-a^4 < 0 \Leftrightarrow a^4 > 1 \Leftrightarrow |a| > 1 \Leftrightarrow (a > 1 \text{ ή } a < -1)$

  Αν $a > 1$ η $f \uparrow R$, ενώ αν $a < -1$ η $f \downarrow R$.

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1-a^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 < 1 \Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 0$ ή $0 < a < 1$

  Σε αυτή την περίπτωση η (Ι) έχει ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4a^4}}{2a} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-a^4}}{a}$

  Αν $0 < a < 1$ η $f \uparrow \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{1-a^4}}{a}\right], \left[\dfrac{1+\sqrt{1-a^4}}{a}, +\infty\right)$

  και η $f \downarrow \left[\dfrac{1-\sqrt{1-a^4}}{a}, \dfrac{1+\sqrt{1-a^4}}{a}\right]$

  Αν $-1 < a < 0$ η $f \uparrow \left[\dfrac{1+\sqrt{1-a^4}}{a}, \dfrac{1-\sqrt{1-a^4}}{a}\right]$

  και $f \downarrow \left(-\infty, \dfrac{1+\sqrt{1-a^4}}{a}\right], \left[\dfrac{1-\sqrt{1-a^4}}{a}, +\infty\right)$

- Αν $\Delta = 0$ η (Ι) έχει μια ρίζα, $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1-a^4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

  Διπλή $x = \dfrac{-\beta}{2a} = \dfrac{2}{2a} = \dfrac{1}{a} = \pm 1$

  Αν $a = 1$ η $f \uparrow$ R

  Αν $a = -1$ η $f \downarrow$ R.

ii) Αν $a \geq 1$ η $f \uparrow$ στο R οπότε για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \dfrac{e^{ax}}{x^2+a^2} > \dfrac{1}{a^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{ax} > 1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2$

iii) Επειδή x_1, x_2 οι ρίζες $f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^3 = 0$ θα είναι από τους τύπους Vietta: $x_1 + x_2 = \dfrac{2}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = a^2$

$$L = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1 \cdot x_2}\right)^{\frac{(x_1+x_2)^2}{4}} = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2}\right)^{\frac{1}{a^2}}$$

Όμως $\left(\dfrac{1+a^2}{1-a^2}\right)^{\frac{1}{a^2}} = e^{\frac{1}{a^2}\ln\frac{1+a^2}{1-a^2}}$, θέτω $u = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1+a^2}{1-a^2}\right)}{a^2}$

Το $\displaystyle\lim_{a \to 0} \frac{1}{a^2} \ln\frac{1+a^2}{1-a^2} = \lim_{a \to 0} \frac{\ln\frac{1+a^2}{1-a^2}}{a^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ *de* l' Hospital

$$= \lim_{a \to 0} \frac{\frac{1+a^2}{1-a^2} \cdot \left(\frac{1+a^2}{1-a^2}\right)'}{2a} = \lim_{a \to 0} \frac{\frac{1+a^2}{1-a^2} \cdot \frac{2a(1-a^2)+(1+a^2)2a}{(1-a^2)^2}}{2a}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{1-a^2}{1+a^2} \cdot \frac{(1-a^2)+\left(1+a^2\right)}{\left(1-a^2\right)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

Οπότε $u \to 2$

Άρα $L = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right)^{\frac{1}{a^2}} = \lim_{a \to 0} e^{\frac{1}{a^2} \ln \frac{1+a^2}{1-a^2}} = \lim_{u \to 2} e^u = e^2$

iv) $I = \int \phi(x)dx = \int (x^2+a^2) \frac{e^{ax}}{x^2+a^2} \eta\mu x dx = \int e^{ax} \eta\mu x dx = \int \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' \eta\mu x dx =$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \eta\mu x - \int \frac{e^{ax}}{a} (\sigma\upsilon\nu x) dx = \frac{e^{ax}}{a} \eta\mu x - \frac{1}{a} \int e^{ax} \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \eta\mu x - \frac{1}{a} \left\{ \frac{e^{ax}}{a} \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{a} \underbrace{\int e^{ax} \eta\mu x dx}_{I} \right\} \Rightarrow$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a} \eta\mu x - \frac{1}{a^2} e^{ax} \sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{a^2} I \Rightarrow I(1+\frac{1}{a^2}) = \frac{e^{ax}}{a^2} (a\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{a^2+1} \left[e^{ax} (a\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \right] + c$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ ΙΙ

i) $\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{z} + z - z \right| \leq \left| \frac{1}{z} + z \right| + |z| \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| \leq \frac{3}{2} + |z| \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2}|z| + |z|^2 \Rightarrow 2 \leq 3|z| + 2|z|^2 \Rightarrow$

$2|z|^2 + 3|z| - 2 \geq 0 \quad (1)$

Η εξίσωση $2\omega^2 + 3\omega - 2 = 0$ έχει ρίζες $\omega = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \left(\omega = -2 \text{ ή } \omega = \frac{1}{2} \right)$

Η $2\omega^2 + 3\omega - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \omega \leq -2$ ή $\omega \geq \frac{1}{2}$

Η λύση της (1): $|z| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|z| \geq 1$

ii) Για να έχει το μικρότερο μέτρο θα πρέπει $|z_0| = \frac{1}{2}$

Θέτουμε $|z_0| = a + i\beta$, $\alpha, \beta \in R$. Τότε έχουμε:

$$\left(|a+i\beta| = \frac{1}{2} \text{ και } \left| a+i\beta + \frac{1}{a+i\beta} \right| = \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(a^2+\beta^2 = \frac{1}{4} \text{ και } |a+i\beta+(a-i\beta)4| = \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(a^2+\beta^2 = \frac{1}{4} \text{ και } \sqrt{(5a)^2+(-3\beta)^2} = \frac{3}{2} \right)$$

Από την λύση του συστήματος παίρνουμε $a = 0$ και $\beta = \pm\frac{1}{2}$.

Άρα ο $z_0 = \pm\frac{1}{2}i$

iii) $4{z_0}^4+4{z_0}^3+{z_0}^2+z_0 = 4(\pm\frac{1}{2}i)^4+4(\pm\frac{1}{2}i)^3+(\pm\frac{1}{2}i)^2+(\pm\frac{1}{2}i)=$

$$\frac{1}{4}i^4+\frac{1}{2}(\pm i)^3+\left(\frac{1}{2}i\right)^2+\left(\pm\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}(\pm i)^3+(\pm\frac{1}{2}i)=0$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν

- $x^3 f''(x)e^{-\frac{1}{x}}=1$ για $x>0$
- $f(1)=e$ και $f'(1)=0$

α) Να βρείτε τον τύπο της f και το σύνολο τιμών της

β) Να βρείτε το πλήθος λύσεων της $f(x)=2009$

γ) Να αποδείξετε ότι: $x^x \ge e^{x-1}$

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(\nu)+f(\nu+2)>2f(\nu+1)$ με $\nu\in N^*$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν

- $x^3 f''(x)e^{-\frac{1}{x}}=1$ για $x>0$
- $f(1)=e$ και $f'(1)=0$

α) Να βρείτε τον τύπο της f και το σύνολο τιμών της

β) Να βρείτε το πλήθος λύσεων της $f(x)=2009$

γ) Να αποδείξετε ότι: $x^x \ge e^{x-1}$

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(\nu)+f(\nu+2)>2f(\nu+1)$ με $\nu\in N^*$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ

α) $x^3 f''(x)=e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow xf''(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ (1) Τότε:

$$\int xf''(x)dx=\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx \Rightarrow xf'(x)-\int f'(x)x'dx=-e^{\frac{1}{x}}+c \Rightarrow xf'(x)-f(x)=-e^{\frac{1}{x}}+c \quad (2)$$

Για $x=1$ στην (2): $f'(1)-f(1)=-e+c\Rightarrow c=0$

Η (2) γίνεται $xf'(x)-f(x)=-e^{\frac{1}{x}}$ (3)

Τότε $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}+c$ (4)

Για $x=1$: $f(1)=e+c\Rightarrow c=0$

Άρα $\dfrac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow f(x)=xe^{\frac{1}{x}},\ \ x>0$

$$f'(x)=(x)'e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'\Rightarrow f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{\frac{1}{e^{x}}}{x}=\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$

Ενώ $f'(x)<0\Leftrightarrow x<1$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Έστω $\Delta_1=(0,1]$, $\Delta_2=[1,+\infty)$. Το πεδίο τιμών της f είναι $f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)$

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ (Θέτω $\dfrac{1}{x}=u$) $=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$

$f(\Delta_1)=[e,+\infty)$, $f(\Delta_2)=[e,+\infty)$

Άρα $f(0,+\infty)=[e,+\infty)\cup[e,+\infty)=[e,+\infty)$

β) $f(x)=2009$

Το $2009\in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in\Delta_1$: $f(x_1)=2009$

Το $2009\in f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in\Delta_2$: $f(x_2)=2009$

Επειδή η f είναι μονότονη σ’ αυτά η εξίσωση $f(x)=2009$ έχει ακριβώς 2 λύσεις.

γ) α΄ τρόπος

$x^x\ge e^{x-1}\Leftrightarrow x\ln x\ge x-1\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge0$

Έστω $g(x)=x\ln x-x+1$, $x>0$

$g'(x)=\ln x$, $g'(1)=0$

$g'(x)>0\Leftrightarrow x>1$, $g'(x)<0\Leftrightarrow x>1$

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Άρα:

$g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow x\ln x - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^x \geq e^{x-1}$

β΄ τρόπος

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} \geq e \Leftrightarrow \ln\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) \geq \ln e \Leftrightarrow x\ln\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) \geq x\ln e \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^x \geq e^{x-1}$$

δ) $f(\nu) + f(\nu+2) > 2f(\nu+1) \Leftrightarrow f(\nu+2) - f(\nu+1) > f(\nu+1) - f(\nu) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(\nu+2) - f(\nu+1)}{\nu+2-(\nu+1)} > \frac{f(\nu+1) - f(\nu)}{\nu+1-\nu}$$

Στα $[\nu, \nu+1], [\nu+1, \nu+2]$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (\nu, \nu+1)$, $\xi_2 \in (\nu+1, \nu+2)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\nu+1) - f(\nu)}{\nu+1-\nu}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\nu+2) - f(\nu+1)}{\nu+2-(\nu+1)}$$

Από την υπόθεση $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} > 0$ άρα η $f' \uparrow$.

Επειδή $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(\nu+1) - f(\nu) < f(\nu+2) - f(\nu+1) \Rightarrow$

$2f(\nu+1) < f(\nu) + f(\nu+2)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

ΘΕΜΑ

Έστω $f(x) = \frac{ax^2}{x+\beta}$, $a > 0$, $\beta > 0$.

i) Να προσδιορίσετε τα α, β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει μια ασύμπτωτη παράλληλη στην πρώτη διχοτόμο της $x\hat{o}y$ και η απόσταση μεταξύ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ να είναι $\sqrt{20}$, x_1, x_2 θέσεις ακρότατων.

ii) Για $a = 1$, $\beta = 1$ να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την c_f, τον x΄x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 4$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους

της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

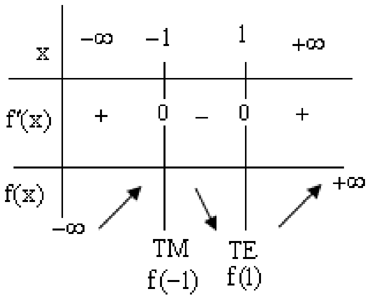
ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΗ ΠΟΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (Μελέτη συνάρτησης)

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της όταν $\alpha \in R$.

1^ος^ τρόπος

Έστω $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$, $x \in R$, $\alpha \in R$

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$



- $f(1) = \alpha - 2$
- $f(-1) = \alpha + 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

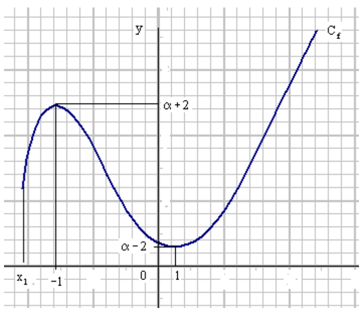
Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $x^3 - 3x + \alpha = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ισοδυναμεί με το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον $x'x$.

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, $\Delta_2 = [-1, 1]$, $\Delta_3 = [1, +\infty)$

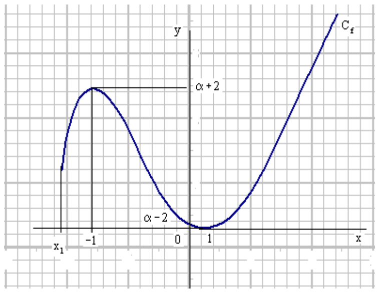
$f(\Delta_1) = (-\infty, \alpha + 2]$, $f(\Delta_2) = [\alpha - 2, \alpha + 2]$, $f(\Delta_3) = [\alpha - 2, +\infty)$

Θα εξετάσουμε τις τιμές του α, για τις οποίες το 0 ανήκει σε κάποιο από $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$, $f(\Delta_3)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

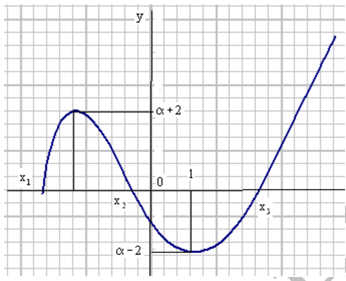
- Αν $0 < \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha > 2$ τότε η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο x_1, $x_1 \in \Delta_1$ στο Δ_1 η $f \uparrow$ άρα $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.



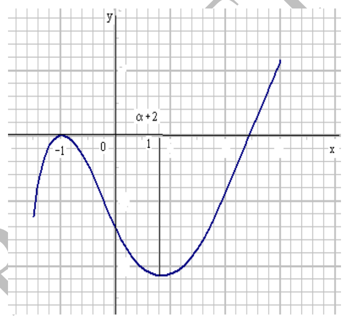
- Αν $\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ τότε η c_f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία, άρα η $f(x)=0$ έχει 2 λύσεις.



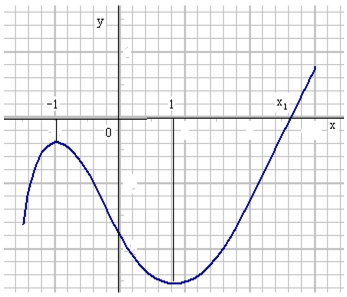
- Αν $\alpha-2<0<\alpha+2 \Leftrightarrow -2<\alpha<2$ η c_f τέμνει τον $x'x$ σε 3 σημεία, άρα, η $f(x)=0$ έχει 3 λύσεις.



- Αν $\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=-2$ η c_f τέμνει τον $x'x$ σε 2 σημεία, άρα η $f(x)=0$ έχει 2 λύσεις.



- Αν $\alpha+2>0 \Leftrightarrow \alpha>-2$ η c_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο, άρα η $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση.



$2^{ος}$ τρόπος

Η $x^3-3x+\alpha=0 \Leftrightarrow -x^3+3x=\alpha$ (I)

Έστω $f(x)=-x^3+3x$, $x\in R$, $\alpha\in R$

Θα μελετήσουμε την f

$f'(x)=-3x^2+3$ $\quad f'(x)=0 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$

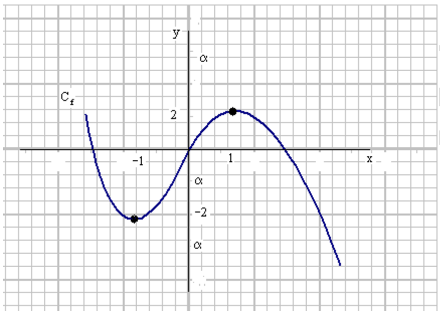
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$
			TE $f(-1)$		TM $f(1)$		

- $\text{TM}: \ f(1) = 2$
- $\text{TE}: f(-1) = -2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$

$f''(x) = -6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$	

$\Sigma K\,(0, f(0)) = (0,0)$



Η (Ι) ισοδυναμεί $f(x) = \alpha \Leftrightarrow$ με πόσα είναι τα σημεία τομής της $\psi = \alpha$ με την c_f.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $\alpha < -2$ η $f(x) = \alpha$ έχει μία λύση
- Αν $\alpha = -2$ η $f(x) = \alpha$ έχει 2 λύσεις
- Αν $-2 < \alpha < 2$ η $f(x) = \alpha$ έχει 3 λύσεις
- Αν $\alpha = 2$ η $f(x) = \alpha$ έχει 2 λύσεις
- Αν $\alpha > 2$ η $f(x) = \alpha$ έχει μία λύση

3^{ος} τρόπος

Έστω $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$, $x \in R$, $\alpha \in R$

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\alpha + 2$	$\searrow$	$\alpha - 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Κατασκευάζουμε τον διπλανό πίνακα που δείχνει το πρόσημο του $f(1)$, $f(-1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του α.

α	$-\infty$ ... -2	-2 ... 2	2 ... $+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	−	−	−
$f(-1)$ $\alpha+2$	−	+	+
$f(1)$ $\alpha-2$	−	−	+
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	+	+	+

Παρατηρώντας μια συγκεκριμένη στήλη του, κάθε αλλαγή προσήμου, από πάνω προς τα κάτω, εξασφαλίζει μία ακριβώς ρίζα της $f(x)=0$ στο αντίστοιχο διάστημα.

- Αν $\alpha\in(-\infty,-2)$ έχουμε $x_1\in(1,+\infty): f(x_1)=0$
- Αν $\alpha=-2$ έχουμε $x_1\in(1,+\infty)$, $x_2=-1$, $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$
- Αν $\alpha\in(-2,2)$ έχουμε 3 ρίζες μέσα σε κάθε διάστημα, $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$
- Αν $\alpha=2$ έχουμε ρίζα το 1 (διπλή) και μία στο $(-\infty,-1)$
- Αν $\alpha\in(2,+\infty)$ έχουμε 1 ρίζα στο $(-\infty,1)$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός που δεν είναι πραγματικός ούτε φανταστικός. Να αποδείξετε για κάθε μιγαδικός W υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί λ, μ τέτοιοι ώστε $\mathbf{w=\lambda.z+\mu.\bar{z}}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 1

Ύπαρξη: Έστω ότι υπάρχουν $\lambda,\mu\in R$ με $w=\lambda z+\mu\bar{z}$ (I)

Τότε : $\bar{w}=\lambda\bar{z}+\mu z$ (II)

Οπότε έχουμε το σύστημα 2×2 με αγνώστους λ,μ

$D=\begin{vmatrix} z & \bar{z} \\ \bar{z} & z \end{vmatrix}=z^2-\left(\bar{z}\right)^2\neq0$ αφού $\left(z-\bar{z}\right)\left(z+\bar{z}\right)=0\Leftrightarrow\left(z=\bar{z}\ \text{ ή }\ \bar{z}=-z\right)\Leftrightarrow$

$\left(z\in R\ \text{ ή }\ z\in I\right)$ άτοπο. Το σύστημα έχει μιγαδική λύση με

$$\lambda=\frac{D_\lambda}{D}=\frac{\begin{vmatrix} w & \bar z \\ \bar w & z \end{vmatrix}}{z^2-\left(\bar z\right)^2}=\frac{zw-\bar z\bar w}{z^2-\left(\bar z\right)^2} \text{ και } \mu=\frac{D_\mu}{D}=\frac{\begin{vmatrix} z & w \\ \bar z & \bar w \end{vmatrix}}{z^2-\left(\bar z\right)^2}=\frac{z\bar w-\bar z w}{z^2-\left(\bar z\right)^2} \text{ και}$$

$$\lambda z+\mu\bar z=z\frac{zw-\bar z\bar w}{z^2-\left(\bar z\right)^2}+\bar z\frac{z\bar w-\bar z w}{z^2-\left(\bar z\right)^2}=\ldots=w$$

<u>Μοναδικότητα</u>: Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ',μ' :

$w=\lambda' z+\mu'\bar z$.

Τότε $\lambda' z+\mu'\bar z=\lambda z+\mu\bar z \Leftrightarrow \left(\lambda-\lambda'\right)z+\left(\mu-\mu'\right)\bar z=0$

Αν $z=x+iy$, $x,y\in R^*$ η τελευταία γράφεται ισοδύναμα

$$\left(\lambda-\lambda'\right)\left(x+iy\right)+\left(\mu-\mu'\right)\left(x-iy\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda-\lambda'\right)x+\left(\lambda-\lambda'\right)iy+\left(\mu-\mu'\right)x-\left(\mu-\mu'\right)iy=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda-\lambda'+\mu-\mu'\right)x+\left(\lambda-\lambda'-\left(\mu-\mu'\right)\right)iy=0+0i$$

$$\begin{cases}\lambda-\lambda'+\mu-\mu'=0\\ \lambda-\lambda'-\mu+\mu'=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-\lambda'=0\\ \lambda-\lambda'-\mu+\mu'=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\lambda'\\ \mu=\mu'\end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w οι οποίοι είναι μη μηδενικοί και διαφορετικοί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2|z|^x+|w|^x}{|z|^x+2|w|^x}$, $x\in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)-2\rho^{2010}=0$.

Β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Γ. Να ελέγξετε την μονοτονία της f

Δ. Να αποδείξετε ότι αν ο μιγαδικός $\kappa=\dfrac{z+w}{z-w}$ είναι φανταστικός τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Ε. Αν $|\kappa|=1$, να δείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο και να βρεθεί το εμβαδόν του.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΘΕΜΑ

Α) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x^{2008}$, $x\in[0,1]$.

- Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $h(0)=f(0)=1>0$

$$h(1)=f(1)-2=\frac{2|z|^1+|w|^1}{|z|^1+2|w|^1}-2=\frac{-3|w|}{|z|+2|w|}<0$$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει $\rho\in(0,1)$:

$h(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)=2\rho^{2008}$.

Β) Ο τύπος της f γίνεται ισοδύναμα: $f(x)=\dfrac{2\left|\dfrac{z}{w}\right|^{x}+1}{\left|\dfrac{z}{w}\right|^{x}+2}$, θέτω $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\alpha>0$ οπότε

$f(x)=\dfrac{2\alpha^{x}+1}{\alpha^{x}+2}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{x}=\begin{cases}+\infty, & \alpha>1\\ 1, & \alpha=1\\ 0, & 0<\alpha<1\end{cases}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^{x}\left[2+\dfrac{1}{\alpha^{x}}\right]}{\alpha^{x}\left[1+\dfrac{2}{\alpha^{x}}\right]}=2$
- Αν $\alpha=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
- Αν $0<\alpha<1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{2.0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}2, & |z|>|w|\\ 1, & |z|=|w|\\ \dfrac{1}{2}, & |z|<|w|\end{cases}$

Γ) $f'(x)=\dfrac{\left(2\alpha^{x}+1\right)'\left(\alpha^{x}+2\right)-\left(2\alpha^{x}+1\right)\left(\alpha^{x}+2\right)'}{\left(\alpha^{x}+2\right)^{2}}=$

$\dfrac{2\alpha^{x}\ln\alpha\left(\alpha^{x}+2\right)-\left(2\alpha^{x}+1\right)\alpha^{x}\ln\alpha}{\left(\alpha^{x}+2\right)^{2}}=\dfrac{3\alpha^{x}\ln\alpha}{\left(\alpha^{x}+2\right)}$

Αν $\alpha>1$ τότε $\ln\alpha>0$ οπότε $f'(x)>0$ και άρα η f γνησίως αύξουσα.
Αν $\alpha=1$ τότε $\ln\alpha=0$ άρα $f'(x)=0$ και η f σταθερή.
Αν $0<\alpha<1$ τότε $\ln\alpha<0$, έχουμε $f'(x)<0$ και η f γνησίως φθίνουσα.

Δ) Ο $\kappa\in I\Leftrightarrow\bar{\kappa}=-\kappa\Leftrightarrow\kappa+\bar{\kappa}=0\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(\kappa)=0\Leftrightarrow\mathrm{Re}(\kappa)=0$

Οπότε $\bar{\kappa}=-\kappa\Leftrightarrow\dfrac{\bar{z}+\bar{w}}{\bar{z}-\bar{w}}=-\dfrac{z+w}{z-w}\Leftrightarrow\left(\bar{z}+\bar{w}\right)\left(z-w\right)=\left(\bar{z}-\bar{w}\right)\left(z+w\right)\Leftrightarrow$

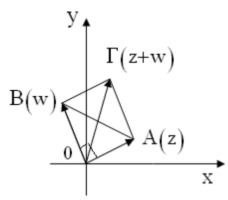
$z\bar{z}-\bar{z}w+\bar{w}z-w\bar{w}=-\left(z\bar{z}+\bar{z}w-\bar{w}z-w\bar{w}\right)\Leftrightarrow$

$z\bar{z}-\bar{z}w+\bar{w}z-w\bar{w}=-z\bar{z}-\bar{z}w+\bar{w}z+w\bar{w}\Leftrightarrow 2|z|^{2}=2|w|^{2}\Leftrightarrow|w|=|z|\Leftrightarrow$

$\left|\dfrac{z}{w}\right|=1=\alpha$. Άρα $f(x)=\dfrac{2\cdot1+1}{1+2}=1$

Ε) $|\kappa|=1\Leftrightarrow|z+w|=|z-w|\Leftrightarrow$

ΟΓ = ΑΒ, Α εικόνα του z, Β εικόνα του w. Το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ έχει ίσες διαγώνιους άρα είναι ορθογώνιο.



$E_{(OAB)}=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}|z||w|$ τ.μ.

ΘΕΜΑ

Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και "1−1" για την οποία ισχύει

$$2+f(2)i=\frac{7+f(1)i}{2-i}$$

α) Να δείξετε ότι η f γνησίως μονότονη

β) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f και να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να λύσετε την $f\left(f^{-1}\left(x^2-1\right)-1\right)\geq 4$

δ) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $2f\left(x_0\right)-7=0$.

ΘΕΜΑ

Δίνεται $f:R\to R$ συνεχής και "$1-1$" για την οποία ισχύει

$$2+f(2)i=\frac{7+f(1)i}{2-i}$$

α) Να δείξετε ότι η f γνησίως μονότονη

β) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f και να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να λύσετε την $f\left(f^{-1}\left(x^2-1\right)-1\right)\geq 4$

δ) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $2f\left(x_0\right)-7=0$.

ε) Αν $\int_{-2}^{2}f(x)dx<0$ να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, στο $(-2,2)$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ

Δίνεται $f:R\to R$ συνεχής και "$1-1$" για την οποία ισχύει

$$2+f(2)i=\frac{7+f(1)i}{2-i}$$

α) Να δείξετε ότι η f γνησίως μονότονη

β) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f και να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να λύσετε την $f\left(f^{-1}\left(x^2-1\right)-1\right)\geq 4$

δ) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $2f\left(x_0\right)-7=0$.

ε) Αν $\int_{-2}^{2}f(x)dx<0$ να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, στο $(-2,2)$.

ΛΥΣΗ

α) Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ με $\alpha<\beta<\gamma$ για τα οποία θα ισχύει $f(\alpha)>f(\beta)$ και $f(\beta)<f(\gamma)$. Αν επιλέξουμε κ: $f(\beta)<\kappa<\min\{f(\gamma),f(\alpha)\}$ τότε το $\kappa\in\left(f(\beta),f(\gamma)\right)$ και από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1\in\left(\beta,\gamma\right)$: $f(x_1)=\kappa$. Το $\kappa\in\left(f(\beta),f(\alpha)\right)$, οπότε πάλι από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_2\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $f(x_2)=\kappa$. Τότε έχουμε $x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)=\kappa$ δηλαδή η f δεν είναι "$1-1$", άτοπο ως προς την υπόθεση.

β) $\left[2+f(2)i\right]\left[2-i\right]=7+f(1)i\Leftrightarrow 4-2i+2f(2)i+f(2)=7+f(1)i\Leftrightarrow$

$4+f(2)+\left(2f(2)-2\right)i=7+f(1)i$

Από ισότητα μιγαδικών: $4+f(2)=7$ και $2f(2)-2=f(1)$ οπότε $f(2)=3$ και $f(1)=4$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα. Η f ως γνησίως φθίνουσα είναι "$1-1$" οπότε υπάρχει η f^{-1}. Θα δείξουμε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει αυτό. Έστω $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1<x_2$ τότε $f(x_1)>f(x_2)$ με εφαρμογή της f^{-1} θα έχουμε: $f^{-1}\left(f(x_1)\right)\leq f^{-1}\left(f(x_2)\right)\Rightarrow\left(f^{-1}of\right)\left(x_1\right)\leq\left(f^{-1}of\right)\left(x_2\right)\Rightarrow$

$x_1 \le x_2$ άτοπο. Άρα η f^{-1} γνησίως φθίνουσα.

γ) Είναι $f\left(f^{-1}\left(x^2-1\right)-1\right) \ge f(1) \Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-1\right)-1 \le 1 \Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-1\right) \le 2 = f^{-1}(3) \Leftrightarrow$

$x^2-1 \ge 3 \Leftrightarrow x^2 \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2 \Leftrightarrow \left(x \ge 2 \text{ ή } x \le -2\right)$.

δ) $2f(x_0)-7=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\frac{7}{2}$. Όμως $2<\frac{7}{2}<3$ και η f συνεχής στο R. Από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0 \in R:\ f(x_0)=\frac{7}{2}$

ε) Έχουμε $\int_{-2}^{2} f(x)dx<0$, τότε η f θα παίρνει τουλάχιστον μία αρνητική τιμή στο $[-2,2]$. Δηλαδή θα υπάρχει $\alpha \in [-2,2):\ f(\alpha)<0$. Στο $[\alpha,2]$ η f είναι συνεχής, $f(\alpha)f(2)<0$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις θεωρήματος Bolzano, οπότε, υπάρχει $\gamma \in (\alpha,2): f(\gamma)=0$. Επειδή η f γνησίως φθίνουσα το γ μοναδικό. Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ ακριβώς σε ένα σημείο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

Έστω $\nu \in N$ και η συνάρτηση $f(x)=x^3-75x+25\ 2$

Α) Να βρεθούν τα ακρότατα της f

Β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^{f(\nu)}$, $\nu \in N$

α) Να μελετηθεί η h ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η h είναι κυρτή.

γ) Να βρεθεί ο $\nu \in N^*$, ώστε $h(\nu)=\nu^2$

δ) Να δείξετε ότι $\frac{h'''(\nu)}{\nu-6} \in Z$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ

Έστω $\nu \in N$ και η συνάρτηση $f(x)=x^3-75x+252$

Α) Να βρεθούν τα ακρότατα της f

Β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^{f(\nu)}$, $\nu \in N$

α) Να μελετηθεί η h ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η h είναι κυρτή.

γ) Να βρεθεί ο $\nu \in N^*$, ώστε $h(\nu)=\nu^2$

δ) Να δείξετε ότι $\frac{h'''(\nu)}{\nu-6} \in Z$

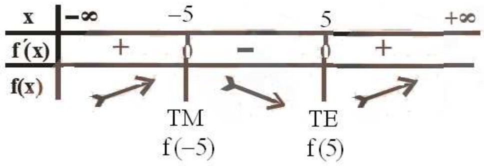
ΛΥΣΗ

Α) Είναι $f'(x)=3x^2-75$. Έστω $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-75=0 \Leftrightarrow x^2-25=0 \Leftrightarrow x=\pm 5$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-25>0 \Leftrightarrow x^2>25 \Leftrightarrow |x|>5 \Leftrightarrow (x>5 \text{ ή } x<-5)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2-25<0 \Leftrightarrow x^2<25 \Leftrightarrow |x|<5 \Leftrightarrow -5<x<5$

Τα παραπάνω φαίνονται στον πίνακα μονοτονίας.



$f(-5)=502$
$f(5)=2$

Β) α) Έχουμε $h(x)=x^{f(\nu)}$, $\nu \in N$ δηλαδή $h(x)=x^{\nu^3-75\nu+252}$.

Τότε $h'(x)=\left(\nu^3-75\nu+252\right)x^{\nu^3-75\nu+251}$. Στο $[0,+\infty)$ η f είναι θετική, άρα

$f(\nu) > 0 \Leftrightarrow \nu^3 - 75\nu + 252 > 0$. Επίσης, $\nu^3 - 75\nu + 251 = \nu\left(\nu^2 - 75\right) + 251$

Θα ελέγξουμε αν ο παραπάνω αριθμός είναι άρτιος ή περιττός.

- Αν ν άρτιος τότε ν^2 άρτιος, οπότε $\nu^2 - 75$ περιττός και άρα $\nu\left(\nu^2 - 75\right)$ άρτιος.

  Ο $\nu\left(\nu^2 - 75\right) + 251$ περιττός ως άθροισμα άρτιου με περιττό.

- Αν ν περιττός τότε $\nu^2 - 75$ άρτιος οπότε $\nu\left(\nu^2 - 75\right)$ άρτιος και τελικά $\nu\left(\nu^2 - 75\right) + 251$ περιττός. Επομένως, ο $\nu^3 - 75\nu + 251$ είναι περιττός φυσικός.

Το πρόσημο της $h'(x) = (\nu^3 - 75\nu + 252)x^{\nu^3 - 75\nu + 251}$ εξαρτάται μόνο από το x.
Αν $x > 0$ έχουμε $h'(x) > 0$, αν $x < 0$ έχουμε $h'(x) < 0$.
Η h γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

β) $h''(x) = (\nu^3 - 75\nu + 252)(\nu^3 - 75\nu + 251)x^{\nu^3 - 75\nu + 250}$

Ο αριθμός $(\nu^3 - 75\nu + 252)(\nu^3 - 75\nu + 251) > 0$ και άρτιος (γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων), ενώ ο $\nu^3 - 75\nu + 250$ είναι άρτιος άρα $h''(x) \geq 0$ οπότε η h είναι κυρτή στο R.

γ) $h(\nu) = \nu^2 \Leftrightarrow \nu^{f(\nu)} = \nu^2$, $\nu \in N$.
Αν $\nu = 1$ ισχύει
Αν $\nu > 1$ τότε $f(\nu) = 2 \Leftrightarrow \nu = 5$, διότι το 2 είναι ακρότατο της f και είναι μοναδικό.

δ) $h'''(x) = (\nu^3 - 75\nu + 252)(\nu^3 - 75\nu + 251)(\nu^3 - 75\nu + 250)x^{\nu^3 - 75\nu + 249}$

Ο αριθμός $(\nu^3 - 75\nu + 252)(\nu^3 - 75\nu + 251)(\nu^3 - 75\nu + 250)$ είναι άρτιος και είναι πολλαπλάσιο του 3, αφού είναι γινόμενο 3 διαδοχικών ακεραίων, άρα πολλαπλάσιο του 6.

$$\frac{h'''(\nu)}{\nu-6} = \frac{(\nu-6)\pi(\nu)\nu^{\nu^3-75\nu+249}}{\nu-6} = \pi(\nu)\nu^{\nu^3-75\nu+249}$$

όπου $\pi(\nu)$ δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του ν.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

Α. Δίνεται $z: \ z = \kappa + (-4-\kappa)i$, $\kappa \in R$ με $-4 \leq \kappa \leq 0$ και w μιγαδικός με $w^{2010} = \frac{3+4i}{4-3i}$ να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι που ανήκουν οι εικόνες των z και w.

Β. Έστω C_1 ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z και C_2 ο γεωμετρικός τόπος που ανήκει η εικόνα του w. Θεωρούμε $z_0 = x_0 + iy_0$ που ανήκει στην C_1 και φέρνουμε εφαπτόμενα τμήματα στον C_2. Να βρεθεί η εικόνα του z_0, ώστε η απόσταση του $O(0, 0)$ από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής να είναι μέγιστη. Ποια είναι τότε η απόσταση και ποια η εξίσωση της χορδής που δημιουργείται;

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ

Α. Δίνεται $z: \ z = \kappa + (-4-\kappa)i$, $\kappa \in R$ με $-4 \leq \kappa \leq 0$ και w μιγαδικός με $w^{2010} = \frac{3+4i}{4-3i}$ να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι που ανήκουν οι εικόνες των z και w.

Β. Έστω C_1 ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z και C_2 ο γεωμετρικός τόπος που ανήκει η εικόνα του w. Θεωρούμε $z_0 = x_0 + iy_0$ που ανήκει στην C_1 και φέρνουμε εφαπτόμενα τμήματα στον C_2. Να βρεθεί η εικόνα του z_0, ώστε η απόσταση του $O(0, 0)$ από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής να είναι μέγιστη. Ποια είναι τότε η απόσταση και ποια η εξίσωση της χορδής που δημιουργείται;

ΛΥΣΗ

Α. Έστω $z = x + iy$. Τότε $x = \kappa$ και $y = -4 - \kappa$, $\kappa \in R$. Με πρόσθεση $x + y = -4$. Έχουμε $0 \geq \kappa \geq -4 \Leftrightarrow 0 \geq x \geq -4$. Ακόμα $\kappa \leq 0 \Leftrightarrow -4 - y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -4$.

Ο γεωμετρικός τόπος του z είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $A(-4,0)$, $B(0,-4)$, το οποίο ανήκει στην ευθεία $x+y=-4$.

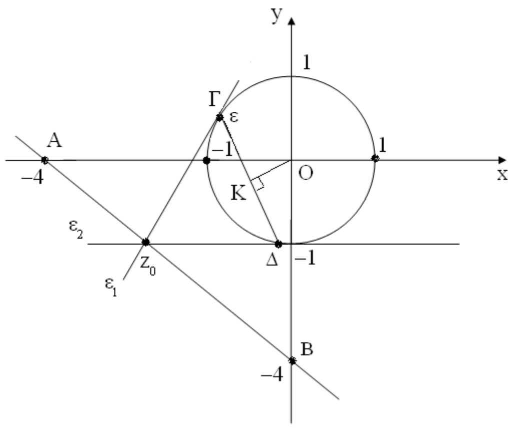
Για τον w : $\left|w^{2010}\right| = \left|\dfrac{3+4i}{4-3i}\right| = \dfrac{|3+4i|}{|4-3i|} = \dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 1$

άρα $|w|^{2010} = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$

Οι εικόνες του w ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$.

Η ευθεία ΓΔ είναι **πολική** του (x_0, y_0) ως προς τον κύκλο $x^2+y^2=1$, οπότε η εξίσωση της είναι

$xx_0 + yy_0 = 1 \Leftrightarrow xx_0 + y_0 y - 1 = 0$



$d(0,\varepsilon) = \dfrac{|x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \Leftrightarrow d(0,\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+(-4-x_0)^2}}$, $-4 \le x \le 0$

Θέλουμε αυτή η απόσταση να είναι μέγιστη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+(-4-x)^2}}$

$-4 \le x \le 0$

$$d'(x) = \frac{-\left(\sqrt{x^2+(-4-x)^2}\right)'}{\left[x^2+(-4-x)^2\right]} = \frac{-\left[2x+2(-4-x)(-1)\right]}{\left[x^2+(-4-x)^2\right]2\sqrt{x^2+(-4-x)^2}} =$$

$$= -\frac{[2x+8+2x]}{2\left[x^2+(-4-x)^2\right]\sqrt{x^2+(-4-x)^2}} = \frac{-4x-8}{2\left[x^2+(-4-x)^2\right]\sqrt{x^2+(-4-x)^2}}$$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x-8 = 0 \Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$

x	-4	-2	0
d΄(x)	+	0	−
d(x)	↗		↘

$d'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2$

$d'(x) < 0 \Leftrightarrow x > -2$

Άρα στο -2 παρουσιάζει μέγιστο το

$d(-2) = \dfrac{1}{\sqrt{4+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{8}}{8}$

Τότε $y = -4-(-2) \Rightarrow y = -2$, $z_0 = -2-2i$

Η εξίσωση της χορδής ΓΔ: $xx_0 + yy_0 = 1 \Leftrightarrow x(-2) + y(-2) = 1 \Leftrightarrow x + y = -\dfrac{1}{2}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

α) Έστω $f:[\alpha,\beta] \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f'(x) = f^3(x)$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι η f είναι η σταθερή 0.

β) Έστω $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x) \ge 0$ και $f''(x) \le 0$ για κάθε x στο R. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ

α) Έστω $f:[\alpha,\beta] \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f'(x) = f^3(x)$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι η f είναι η σταθερή 0.

β) Έστω $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x) \ge 0$ και $f''(x) \le 0$ για κάθε x στο R. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η f είναι συνεχής $[\alpha,\beta]$, θα έχει ολικά ακρότατα. Δηλαδή θα υπάρχουν x_ε, x_μ στο $[\alpha,\beta]$. $\quad f(x_\varepsilon) \le f(x) \le f(x_\mu)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

- Αν το x_ε είναι άκρο διαστήματος, τότε από υπόθεση $f(x_\varepsilon) = 0$.
- Αν το x_ε είναι εσωτερικό σημείο του (α,β) τότε από θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_\varepsilon) = 0$.

  Αλλά $f'(x_\varepsilon) = f^3(x_\varepsilon) = 0 \Rightarrow f(x_\varepsilon) = 0$.

Ομοίως καταλήγουμε $f(x_\mu) = 0$.

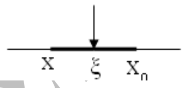
Άρα $f(x_\varepsilon) \le f(x) \le f(x_\mu) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 0$ οπότε $f(x) = 0$.

β) Θα δείξουμε $f'(x) = 0$, για κάθε x στο R. Επειδή $f''(x) \le 0$ στο R έπεται ότι η f' είναι φθίνουσα.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in R : f'(x_0) \ne 0$ τότε $f'(x_0) > 0$ ή $f'(x_0) < 0$.

- Έστω $f'(x_0) > 0$. Στο διάστημα $[x,x_0]$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, οπότε ικανοποιεί το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi \in (x,x_0)$:

  $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \Rightarrow f'(\xi)(x_0 - x) = f(x_0) - f(x) \quad (1)$

  Το $\xi < x_0 \Rightarrow f'(\xi) > f'(x_0) \Rightarrow$

  $\Rightarrow f'(\xi)(x_0 - x) \ge f'(x_0)(x_0 - x) \Rightarrow f(x_0) - f(x) \ge f'(x_0)(x_0 - x) \Rightarrow$

  $\Rightarrow f(x) \le f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x) \Rightarrow f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad (2)$

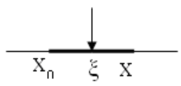
  Παίρνοντας όριο το x να τείνει στο $-\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \le -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

  Τότε υπάρχει x_1 «κοντά» στο $-\infty$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) < 0$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση $f(x) \ge 0$.

- Έστω $f'(x_0) < 0$. Στο $[x_0,x]$ η f ικανοποιεί το Θεώρημα Μέσης Τιμής και υπάρχει

  $\xi \in (x_0,x)$: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$

  $\xi > x_0 \Rightarrow f'(\xi) \le f'(x_0) \Rightarrow f'(\xi)(x - x_0) \le f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$

  $f(x) - f(x_0) \le f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  Παίρνοντας όριο το x να τείνει στο $+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \le \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \right] = -\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

  Υπάρχει x_2 κοντά στο $+\infty$ τέτοιο ώστε $f(x_2) < 0$, το οποίο συμβαίνει πάλι στην υπόθεση $f(x) \ge 0$. Άρα δεν ισχύει η άρνηση που κάναμε, οπότε $f'(x) = 0$ για όλα τα x. Επομένως η f σταθερή.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΕΙ

Α. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \ge 0$ να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$. Ανισότητα Jensens

Β. Αν x, y θετικοί αριθμοί με $x^2 + y^2 = 1$, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \dfrac{y^3+x^3}{xy}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ

Α. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \ge 0$ να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$. Ανισότητα Jensen's

Β. Αν x, y θετικοί αριθμοί με $x^2 + y^2 = 1$, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{y^3+x^3}{xy}$$

ΛΥΣΗ

Α. Αν $\alpha = \beta$ ισχύει ως ισότητα.

Έστω $\alpha < \beta$. Η αρχική γράφεται $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) \le f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \le \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad (\text{I})$$

Για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$.

Υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}$ και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Η $f' \uparrow R$ άρα $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} < \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}$$ δηλαδή η (Ι)

Άρα $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

Αν $\alpha > \beta$, ομοίως.

Β. $1 + A = \frac{x^3}{xy} + \frac{y^3}{xy} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$

Άρα $A = \frac{1-x^2}{x} + \frac{1-y^2}{y}$ με $x, y \in (0,1)$

Θεωρώ $f(t) = \frac{1-t}{\sqrt{t}}$, $t \in (0,1)$

Η $f(t) = t^{-1/2} - t^{1/2}$ έχει

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^{-3/2} - \frac{1}{2}t^{-1/2} \Rightarrow f''(t) = \frac{3}{4}t^{-5/2} + \frac{1}{4}t^{-3/2} > 0$$

άρα η f κυρτή στο $(0,1)$ οπότε από (i) ισχύει $\dfrac{f(x^2)+f(y^2)}{2} \ge f\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{\frac{1-x^2}{x}+\frac{1-y^2}{y}}{2} \ge f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A \ge 2f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A \ge 2\cdot\frac{1-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow A \ge 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Το ίσον ισχύει $x = y = \kappa > 0$ τότε $2\kappa^2 = 1$

$\kappa^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΟΥΝ

ΘΕΜΑ Ι

1. Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των $g(x) = \ln x^e$, $h(x) = -\frac{1}{x}$

2. Να βρεθούν οι πιθανοί τύποι της f στο $(0,+\infty)$ όταν $f^2(x) = ex\ln x - 2f(x), x > 0$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to e} \frac{\left(f^{-1}(x)\right)^2 - 1}{\ln x - 1}$ αν $f(x) = \ln x + e^x$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

3. Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των $g(x) = \ln x^e$, $h(x) = -\frac{1}{x}$

4. Να βρεθούν οι πιθανοί τύποι της f στο $(0,+\infty)$ όταν $f^2(x) = ex\ln x - 2f(x), x > 0$

ΛΥΣΗ

a. Για την σχετική θέση των $g(x) = \ln x^e$ και $h(x) = -\frac{1}{x}$ βρίσκω το πρόσημο της διαφοράς $\phi(x) = g(x) - h(x) = e\ln x + \frac{1}{x}, x > 0$

$\phi'(x) = \frac{e}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{ex-1}{x^2}$

Αν $x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow$ η $\phi'(x) > 0$ άρα η $\phi \uparrow \left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

Αν $x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow$ η $\phi'(x) < 0$ άρα η $\phi \downarrow \left(0,\frac{1}{e}\right]$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$\phi'(x)$	$-$	0	$+$
$\phi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\phi\left(\frac{1}{e}\right) = e\ln e^{-1} + e = 0$

Οπότε $\phi(x) \geq \phi(0) \Leftrightarrow \phi(x) \geq 0$

Άρα η C_g είναι πάνω από την C_h.

b. $f^2(x) = ex\ln x - 2f(x) \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) = ex\ln x \Leftrightarrow$

$f^2(x) + 2f(x) + 1 = ex\ln x + 1 \Leftrightarrow \left(f(x)+1\right)^2 = x\phi(x)$ για $x > 0$.

Από (1) η $\phi(x) \geq 0$ και συνεχής. Επίσης έχει ένα σημείο μηδενισμού. Άρα:

$\left|f(x)+1\right| = \sqrt{x\phi(x)}$

Οι πιθανοί τύποι που προκύπτουν από την τελευταία σχέση είναι:

α) $f(x) + 1 = \sqrt{x\cdot\phi(x)}$, $x > 0$

β) $f(x) + 1 = -\sqrt{x\cdot\phi(x)}$, $x > 0$

γ) $f(x)+1=\begin{cases}\sqrt{x\cdot\phi(x)} & ,\ x\geq\dfrac{1}{e}\\ -\sqrt{x\cdot\phi(x)} & ,0<x<\dfrac{1}{e}\end{cases}$

δ) $f(x)+1=\begin{cases}-\sqrt{x\cdot\phi(x)} & ,\ x\geq\dfrac{1}{e}\\ \sqrt{x\cdot\phi(x)} & ,0<x<\dfrac{1}{e}\end{cases}$

Από τις τελευταίες βρίσκουμε την f .

ΘΕΜΑ ΙΙ

Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\left(f^{-1}(x)\right)^2-1}{\ln x-1}$ αν $f(x)=\ln x+e^x$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$

Αν $x\to e$ τότε $y\to f^{-1}(e)=1$ διότι $f(1)=e$. Οπότε:

$$\lim_{x\to e}\frac{\left(f^{-1}(x)\right)^2-1}{\ln x-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2-1}{\ln f(y)-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{2y}{\dfrac{f'(y)}{f(y)}}=\lim_{y\to 1}\frac{2yf(y)}{f'(y)}=\lim_{y\to 1}\frac{2y\left(\ln y+e^y\right)}{\dfrac{1}{y}+e^y}=\frac{2e}{1+e}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΟΥΝ

ΘΕΜΑ Ι

Έστω $f,g:\left[\alpha,\beta\right]\to R$ συνεχείς συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο $\left(\alpha,\beta\right)$. Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $f(\xi)-f(\alpha)=(\beta-\xi)f'(\xi)$

β) Υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $g(\beta)-g(\xi)=(\xi-\alpha)g'(\xi)$

γ) Αν $g'(x)\neq 0$ για κάθε x στο $\left(\alpha,\beta\right)$, τότε υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω f συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε $x\in\left(\alpha,\beta\right)$ ισχύει $f'(x)\leq\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Να αποδείξετε ότι:

$f(x)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Έστω $f,g:\left[\alpha,\beta\right]\to R$ συνεχείς συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο $\left(\alpha,\beta\right)$. Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $f(\xi)-f(\alpha)=(\beta-\xi)f'(\xi)$

β) Υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $g(\beta)-g(\xi)=(\xi-\alpha)g'(\xi)$

γ) Αν $g'(x)\neq 0$ για κάθε x στο $\left(\alpha,\beta\right)$, τότε υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $h(x)=\left(f(x)-f(\alpha)\right)\left(\beta-x\right)$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$, η οποία είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$ με $h(\alpha)=h(\beta)=0$. Από Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ με $h'(\xi)=0$ που σημαίνει $\left(f'(\xi)-0\right)\left(\beta-\xi\right)-\left(f(\xi)-f(\alpha)\right)=0$ άρα

$f'(\xi)\left(\beta-\xi\right)=f(\xi)-f(\alpha)$.

β) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\left(g(\beta)-g(x)\right)\left(x-\alpha\right)$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$

Πάλι η h ικανοποιεί το Θεώρημα Rolle,

Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta) : h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi-\alpha)g'(\xi) = g(\beta) - g(\xi)$

γ) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \big(f(x) - f(\alpha)\big)\big(g(\beta) - g(x)\big), x \in [\alpha,\beta]$ για την οποία $h(\alpha) = h(\beta) = 0$.

Η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)\big(g(\beta)-g(\xi)\big) - \big(f(\xi)-f(\alpha)\big) - g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{(I)}$$

Το $g'(\xi) \neq 0$ και $g(\beta) - g(\xi) \neq 0$. Διότι

- Αν $g'(\xi) = 0$ θα είχαμε αντίφαση ως προς την υπόθεση
- Αν $g(\beta) - g(\xi) = 0$, τότε η g στο $[\xi,\beta]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και θα υπάρχει $x_0 \in (\xi,\beta)$: $g'(x_0) = \dfrac{g(\beta)-g(\xi)}{\beta-\xi} = 0 \Rightarrow g'(x_0) = 0$ Άτοπο

Άρα ισχύει η (I).

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ισχύει $f'(x) \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) + f(\alpha)$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,x]$, άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $x_1 \in (\alpha,x)$: $f'(x_1) = \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Όμως ισχύει $f'(x) \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ άρα

$$f'(x_1) \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$

$$f(x) \leq f(\alpha) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο $[x,\beta]$. Υπάρχει $x_2 \in (x,\beta)$:

$f'(x_2) \leq \dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x_2) \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x} \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(\beta) - f(x) \leq (\beta - x)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(x) \geq f(\beta) - (\beta - x)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq f(\beta) + (x-\beta)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(x) \geq f(\beta) + \big[x - \alpha - (\beta-\alpha)\big]\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq f(\beta) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} - \big[f(\beta)-f(\alpha)\big] \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq f(\alpha) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε: $f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΟΥΝ

ΘΕΜΑ

Δίνεται f κυρτή στο R με $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$ και $g(x) = \int_0^1 tf(t \cdot x)dt$.

α) Να δείξετε ότι η g συνεχής στο R.

β) Να δείξετε ότι η g παραγωγίσιμη και να βρείτε τη μονοτονία της και τα ακρότατα γ) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $x_0 = 0$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 2tf(t\cdot x)dx \geq 1$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιλεγμένα θέματα για υποψήφιους Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου

ΘΕΜΑ Ι

Έστω $f, g: [\alpha,\beta] \to R$ συνεχείς συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο (α,β). Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f(\xi) - f(\alpha) = (\beta-\xi)f'(\xi)$

β) Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $g(\beta) - g(\xi) = (\xi-\alpha)g'(\xi)$

γ) Αν $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο (α,β), τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $h(x) = \left(f(x) - f(\alpha)\right)\left(\beta - x\right)$, $x \in [\alpha,\beta]$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Από Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $h'(\xi) = 0$ που σημαίνει $\left(f'(\xi) - 0\right)\left(\beta-\xi\right) - \left(f(\xi)-f(\alpha)\right) = 0$ άρα

$f'(\xi)\left(\beta-\xi\right) = f(\xi) - f(\alpha)$.

β) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \left(g(\beta) - g(x)\right)\left(x - \alpha\right)$, $x \in [\alpha,\beta]$

Πάλι η h ικανοποιεί το Θεώρημα Rolle,

Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta): h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi-\alpha)g'(\xi) = g(\beta) - g(\xi)$

γ) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \left(f(x) - f(\alpha)\right)\left(g(\beta) - g(x)\right)$, $x \in [\alpha,\beta]$ για την οποία $h(\alpha) = h(\beta) = 0$.

Η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$f'(\xi)\left(g(\beta)-g(\xi)\right) - \left(f(\xi)-f(\alpha)\right) - g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (Ι)

Το $g'(\xi) \neq 0$ και $g(\beta) - g(\xi) \neq 0$. Διότι

- Αν $g'(\xi) = 0$ θα είχαμε αντίφαση ως προς την υπόθεση
- Αν $g(\beta) - g(\xi) = 0$, τότε η g στο $[\xi,\beta]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και θα υπάρχει $x_0 \in (\xi,\beta): g'(x_0) = \dfrac{g(\beta)-g(\xi)}{\beta-\xi} = 0 \Rightarrow g'(x_0) = 0$ Άτοπο

Άρα ισχύει η (Ι).

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ ισχύει $f'(x) \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Να αποδείξετε ότι:

$f(x) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) + f(\alpha)$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,x]$, άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $x_1 \in (\alpha,x): f'(x_1) = \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Όμως ισχύει $f'(x) \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ άρα

$f'(x_1) \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$

$f(x) \leq f(\alpha) + \left(x-\alpha\right)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1)

Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο $[x,\beta]$. Υπάρχει $x_2 \in (x,\beta)$:

$f'(x_2) \le \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x_2) \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x} \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(\beta) - f(x) \le (\beta - x)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(x) \ge f(\beta) - (\beta - x)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \ge f(\beta) + (x - \beta)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(x) \ge f(\beta) + \left[x - \alpha - (\beta - \alpha)\right]\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \ge f(\beta) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} - \left[f(\beta)-f(\alpha)\right] \Leftrightarrow$$

$$f(x) \ge f(\alpha) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε: $f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΘΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΘΟΥΝ

ΘΕΜΑ

Δίνεται f κυρτή στο R με $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$ και $g(x) = \int_0^1 tf(t \cdot x)dt$.

α) Να δείξετε ότι η g συνεχής στο R.

β) Να δείξετε ότι η g παραγωγίσιμη και να βρείτε τη μονοτονία της και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $x_0 = 0$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 2tf(t \cdot x)dx \ge 1$