ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Έστω f μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ με $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Απόδειξη

Είναι $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$

Έστω $y = f(x)$ και $y_0 = f(x_0)$. Αν $y \to y_0$, $y \neq y_0$ τότε $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$ άρα $x \to x_0$. Τότε

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Άρα $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Αν αυτό ισχύει για κάθε $x_0 \in \Delta$: $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) = 1$

Παρατήρηση 1

Η πρόταση δίνει την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης, χωρίς να γνωρίζουμε τον τύπο της. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x + \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f'(\xi) = 1 + \sigma\upsilon\nu\xi$, $\xi \in (0, \pi)$ και $f'(\xi) \neq 0$.

Επομένως, η παράγωγος της f^{-1} στο $f(\xi)$ είναι $\left(f^{-1}\right)'\left(f(\xi)\right) = \dfrac{1}{f'(\xi)}' = \dfrac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu\xi}$.

Παρατήρηση 2

Η απόδειξη της πρότασης θα μπορούσε να γίνει αν παίρναμε $(y_\nu)_{\nu \in N} \to y_0$, με $(y_\nu)_{\nu \in N}$ να έχει στοιχεία στο $f(\Delta)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και γνησίως μονότονη. Αν $f^{-1}(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε y του $f(\Delta)$ και $f'(x) \neq 0$ τότε $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$, $x \in f(\Delta)$.

Απόδειξη

Ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

Με παραγώγιση: $f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}(x)\right)' = 1$ ή $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$