

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΘΕΜΑ 1

- A. i) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- ii) Να διατυπώσετε το Θ. Rolle και να αναφέρετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

- iii) Θεωρείστε τον ισχυρισμό:

Κάθε συνάρτηση $f: R^* \rightarrow R$ για την οποία ισχύει $f'(x) = 0, \forall x \in R^*$ είναι σταθερή στο R^* . Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα A, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα Ψ αν είναι Ψευδής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- iv) Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως «Αληθή (A)» ή «Ψευδή (Ψ)».

1. Κάθε "1-1" συνάρτηση στο D_f είναι και γνησίως μονότονη.
2. Αν $f(x) \geq \kappa$, για κάθε $x \in D_f$ τότε το κ , ελάχιστο της f στο D_f .
3. Η κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας C_f δεν έχει κοινά σημεία με την C_f .
4. Η $f'(x) = (x-1)^2(x-3)$ έχει ακρότατα στις θέσεις $x=1$ και $x=3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in R$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = -3$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3, \beta = 4$.
- ii) Να μελετήσετε την μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της C_f .
- iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -1$.
- iv) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{e^{f(x)} - e^{9x+9}}$.

ΘΕΜΑ 3

- i) Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -2x^2 + 4x - (x + \alpha) \ln x$,
 $\alpha \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq +2$, $\forall x > 0$.
- ii) Έστω $\alpha = -1$.
- α) Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = -2022$
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f' .
- γ) Για κάθε $\kappa > 0$ να δείξετε ότι $f(\kappa + 2) + f(\kappa) < 2f(\kappa + 1)$

ΘΕΜΑ 4

A. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = f(x), \quad f(0) = f'(0) = 1$$

Να αποδείξετε ότι η $f(x) = e^x$.

- B. i) Έστω σημείο $A(1, 0)$. Αν $M(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$ ένα τυχαίο σημείο της C_f να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από το A είναι $d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + e^{2x}}$.
- ii) Να αποδείξετε ότι από όλα τα σημεία M της C_f , εκείνο που απέχει από το A τη μικρότερη απόσταση είναι το $M_1(0, 1)$.
- iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM_1 του (ii) είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο M_1 .
- iv) Έστω $(\varepsilon): y = x - 1$. Αν $K \in (\varepsilon)$ και $\Lambda \in C_f$ τότε $(K\Lambda) \geq \sqrt{2}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ