

Ασκήσεις στις Εξισώσεις

Άσκηση 1

Δίνονται οι παραστάσεις: $\alpha = \chi + 1$, $\beta = 1 - \chi$.

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{13}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{5\chi - 3}{\chi^2 - 1}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\chi^3 - \chi^2 - \beta = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $(\chi^2 - 1)(2\chi + 1) = \alpha(2\chi + 1)^2$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\|\alpha - 3\| + \chi^2 + 4 = 4\chi$.

Άσκηση 2

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, χ με $\alpha = |6 - 3\chi| - 2|\chi - 2| - \chi + 4$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha = |\chi - 2| - \chi + 4$.

β) Να γράψετε τον α χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του χ για τις οποίες: $\alpha = \chi$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\|\chi - 2| - \chi + 4\| = 4$.

Άσκηση 3

Δίνονται οι παραστάσεις: $\alpha = |\chi - 1|$ και $\beta = |3 - \chi|$ όπου χ πραγματικός αριθμός.

α) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha = \beta$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha + \beta = 6$.

γ) Να δείξετε ότι: $\alpha + \beta \geq 2$.

Άσκηση 4

Έστω ότι η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ έχει ρίζες τα $\chi_1 = 4 - 2\sqrt{3}$,
 $\chi_2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

α) Να δείξετε ότι: $\beta = -2\gamma$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $\chi^2 - 8\chi + 4 = 0$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $4\chi^2 - 8\chi + 1 = 0$ έχει ρίζες τις $\frac{1}{\chi_1}$ και $\frac{1}{\chi_2}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - (\alpha + 1)\chi + \beta + 2 = 0, \alpha \geq \beta + 2 > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

γ) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες αντίστροφες και στη συνέχεια να βρείτε τις ρίζες της.

Άσκηση 6

Δίνεται η παράσταση $A = \mu\chi^2 + 2\chi + \mu$. Αν η εξίσωση $A = 0$ δεν έχει ρίζα το $\chi = 0$ τότε:

α) Να δείξετε ότι: $\mu \neq 0$.

β) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση $A = 0$ έχει διπλή ρίζα.

γ) Αν η εξίσωση $A = 0$ έχει ρίζα το -1 , να βρείτε το μ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ρίζα αυτή είναι διπλή.

δ) Αν $\mu = 6$ να λύσετε την εξίσωση: $\chi^4 + A = 2\chi + 22$.

ε) Αν $\mu = 8$ να λύσετε την εξίσωση: $\chi^5 - A + 2\chi + 8 = 0$.

στ) Αν $\mu = 1$ να λύσετε την εξίσωση: $|A - \chi^2 - 2| = \chi - 2$.