Εφαρμογές στα Συμμετρικά Σημεία

Επιμέλεια: Νικόλαος Βρουλιώτης

Εφαρμογή 1η
Δίνονται τα σημεία Α$(10, 20)$ και Β$(-30, 10)$. Να βρεθούν:
(i) Το σημείο Μ του $\chi'\chi$ που να ισαπέχει από τα Α,Β
(ii) Το σημμείο Ν του $\psi'\psi$ που να ισαπέχει από τα Α,Β
(iii) Το μέσο Κ του ΑΒ
(iv) Το συμμετρικό του Α ως προς το Μ
(v) Το συμμετρικό του Β ως προς το Α

Λύση: **(i)** Έστω Μ$(x, 0)$ το ζητούμενο σημείο. Σχηματίζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BM}$. Είναι $\overrightarrow{AM} = (10 - x, 20)$ και $\overrightarrow{BM} = (-30 - x, 10)$. Για να ισαπέχει το σημείο Μ από τα Α και Β, θέλουμε να ισχύει: $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$. Έτσι, έχουμε ισοδύναμα:

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| \Leftrightarrow (\sqrt{(x-10)^2 + 20^2})^2 = (\sqrt{(x+30)^2 + 10^2})^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2} -20x + \underline{100} + 400 = \underbrace{x^2} + 60x + 900 + \underline{100} \Leftrightarrow 80x = -500 \Leftrightarrow x = \frac{-50}{8} \Leftrightarrow x = \frac{-25}{4}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ$(\frac{-25}{4}, 0)$.

(ii) Όμοια με το ερώτημα (i) για το σημείο Ν$(0, y)$ είναι $\overrightarrow{AN} = (10, 20 - y)$ και $\overrightarrow{BN} = (-30, 10 - y)$. Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$|\overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{BN}| \Leftrightarrow (\sqrt{100 + (y-20)^2})^2 = (\sqrt{900 + (y-10)^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{y^2} - 40y + 400 + \underline{100} = \underbrace{y^2} - 20y + \underline{100} + 900 \Leftrightarrow 20y = -500 \Leftrightarrow y = -25$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Ν$(0, -25)$.

(iii) Για να βρούμε το μέσο Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, χρησιμοποιούμε τους τύπους που δίνουν τις συντεταγμένες του μέσου ευθύγραμμου τμήματος. Είναι επομένως:

$$x_K = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{10 - 30}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

$$y_K = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{20+10}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Συνεπώς το μέσο του ΑΒ είναι: Κ$(-10, 15)$.

(iv) Ζητάμε το συμμετρικό του σημείου Α$(10, 20)$ ως προς το σημείο Μ$(\frac{-25}{4}, 0)$. Έστω Α′(x, y) αυτό το σημείο. Θα έχουμε ότι το σημείο Μ θα είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ′. Άρα θα ισχύουν για αυτό το σημείο οι τύποι:

$$\frac{-25}{4} = \frac{x+10}{2} \Leftrightarrow 4\frac{-25}{4} = 4\frac{x+10}{2} \Leftrightarrow 2x + 20 = -25 \Leftrightarrow 2x = -45 \Leftrightarrow x = \frac{-45}{2}$$

$$0 = \frac{y+20}{2} \Leftrightarrow y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = -20$$

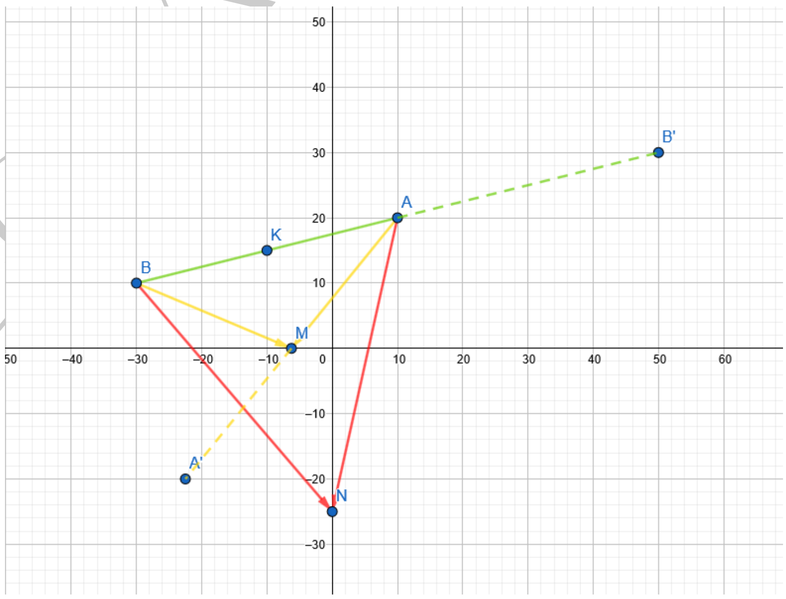
Άρα το συμμετρικό του Α ως προς το Μ, είναι το σημείο Α′$(\frac{-45}{2}, -20)$.

(v) Όμοια με το ερώτημα **(iv)** έστω Β′ το συμμετρικό του Β$(-30, 10)$ ως προς το Α$(10, 20)$. Τότε το Α θα είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΒ′ και άρα θα έχουμε:

$$10 = \frac{x-30}{2} \Leftrightarrow x = 20 + 30 \Leftrightarrow x = 50$$

$$20 = \frac{y+10}{2} \Leftrightarrow y + 10 = 40 \Leftrightarrow y = 30$$

Άρα το συμμετρικό του Β ως προς το Α, είναι το σημείο Β′$(50, 30)$.



Εφαρμογή 2η
Δίνονται τα σημεία: Α$(1, -2)$, Β$(-3, 10)$ και Γ$(4, -11)$.
(i) Να δείξετε ότι τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά
(ii) Να βρείτε το μέσο Μ του ΑΒ
(iii) Να βρεθεί το συμμετρικό του Α ως προς τον $\chi'\chi$
(iv) Να βρεθεί το συμμετρικό του Β ως προς τον $\psi'\psi$
(v) Να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ
(vi) Να βρεθεί το συμμετρικό του Γ ως προς την αρχή των αξόνων
(vii) Αν Δ$(4, 7)$ τότε να βρεθεί το συμμετρικό του Δ ως προς το Α

Λύση: **(i)** Για να δείξουμε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα. Επομένως, σχηματίζουμε πρώτα τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-3-1, 10+2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 12)$$
$$\overrightarrow{B\Gamma} = (4+3, -11-10) \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = (7, -21)$$

Τώρα, θέλουμε να ισχύει: $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την 2η Συνθήκη Παραλληλίας. Για αυτό τον λόγο υπολογίζουμε την ορίζουσα (det) των δυο διανυσμάτων. Έχουμε:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 7 & -21 \end{vmatrix} = 84 - 84 = 0$$

Εφόσον $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0$ από την 2η Συνθήκη Παραλληλίας έπεται ότι $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma}$. Οπότε τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

(ii) Το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, από τους τύπους του μέσου, θα είναι: Μ$(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ =Μ$(\frac{1-3}{2}, \frac{10-2}{2})$ =Μ$(-1, 4)$.

(iii) Από τη γενική θεωρία το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τον $\chi'\chi$ έχει την ίδια τετμημένη (το ίδιο x) και αντίθετη τεταγμένη (το αντίθετο y) από το αρχικό σημείο. Έτσι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον $\chi'\chi$ είναι το σημείο: Α'$(1, 2)$.

(iv) Από τη γενική θεωρία το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τον $\psi'\psi$ έχει την ίδια τεταγμένη (το ίδιο y) και αντίθετη τετμημένη (το αντίθετο x) από το αρχικό σημείο. Έτσι το συμμετρικό του σημείου Β ως προς τον $\psi'\psi$ είναι το σημείο: Β'$(3, 10)$.

(v) Για να βρούμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, βρίσκουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέτρο (δηλαδή το μήκος) $|\overrightarrow{A\Gamma}|$. Το μέτρο του διανύσματος

$\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι ακριβώς το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.
Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (4-1, -11+2) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = (3, -9)$$

και

$$|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{3^2 + (-9)^2} \Leftrightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} \Leftrightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}| = 3\sqrt{10}$$

(vi) Από τη γενική θεωρία το συμμετρικό ενός σημείου ως προς την αρχή των αξόνων έχει την αντίθετη τετμημένη (αντίθετο x) και αντίθετη τεταγμένη (αντίθετο y) από το αρχικό σημείο. Έτσι το συμμετρικό του σημείου Γ ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο: $\Gamma'(-4, 11)$.

(vii) Έστω $\Delta'(x, y)$ το συμμετρικό του Δ ως προς το Α. Τότε το Α θα είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΔΔ′. Θα ισχύει δηλαδή:

$$1 = \frac{x+4}{2} \Leftrightarrow x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = -2$$

και

$$-2 = \frac{y+7}{2} \Leftrightarrow y + 7 = -4 \Leftrightarrow y = -11$$

Άρα $\Delta'(-2, -11)$.