

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΚΥΚΛΟΣ – ΘΕΩΡΙΑ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω $c: x^2 + y^2 = \rho^2$. Αν (x_1, y_1) ένα σημείο του κύκλου, να δείξετε ότι η εφαπτομένη στο (x_1, y_1) έχει εξίσωση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$.

B. Να δώσετε τους ορισμούς των γεωμετρικών τόπων:

i) παραβολή

ii) έλλειψη

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y = 0$ παριστάνει κύκλο

2. Η ευθεία $\varepsilon: x + y = 1$ ορίζει στον κύκλο $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ χορδή με μεγίστου μήκους.

3. Αν K, Λ σημεία που έχουν μέσο τους το (0,0), τότε τα σημεία M που οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την $\frac{1}{(KM)} + \frac{1}{(LM)} = \frac{2000}{(KM) \cdot (LM)}$ ανήκουν σε έλλειψη.

4. Η εξίσωση $2x^2 - 3y^2 = 1$ παριστάνει υπερβολή.

5. Η υπερβολή $16y^2 = 9x^2 + 1$, έχει ασύμπτωτη την $y = \frac{4}{3}x$.

6. Η εξίσωση $x^2 = 8y$ παριστάνει παραβολή με διευθυτούσα $y = -4$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda - 4) \cdot x - (2\lambda + 2) \cdot y + 5\lambda - 20 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο \mathbb{R} , τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (1) ανήκουν σε μία ευθεία.

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία M(-3,1) και N(5,5).

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο M .

ε) Αν $\Sigma(8,9)$, να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του Σ από τον κύκλο που προκύπτει από την
(1) για $\lambda=0$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ και ο κύκλος $c: x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y = 0$ (1)

A. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

i) η ε να τέμνει τον c .

ii) η χορδή που ορίζει η ε πάνω στον c , να φαίνεται από το $O(0,0)$ υπό ορθή γωνία.

B. i) Δίνεται σημείο $A(4\eta\mu\theta, 4\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του A .

ii) Αν σημείο $P(x_1, y_1)$ κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$, να βρείτε σε ποια κωνική

τομή κινείται το σημείο $M(x, y)$ με συντεταγμένες $x = \frac{3}{2} \cdot x_1$, $y = \frac{1}{2} \cdot y_1$.