

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

A. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ . Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , να δείξετε ότι:

i) Όλες οι συναρτήσεις $G : G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ .

ii) Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ είναι της μορφής:

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

B. Να απαντήσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στους παρακάτω ισχυρισμούς:

i) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$.

ii) $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx = 0$

iii) $\int_{-a}^a (x^4 + 1) dx < \int_{-a}^a (x^4 + x^2 + 1) dx$ τότε $a > 0$.

iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta\mu^2 x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sigma\nu\nu x dx$

ΘΕΜΑ 2

A. i) Να υπολογίσετε το $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\epsilon\phi x - 6}{(\epsilon\phi^2 x - 6\epsilon\phi x + 8) \sigma\nu\nu^2 x} dx$.

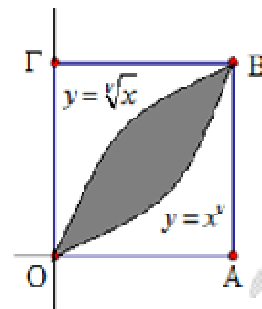
ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\nu\nu^4 x \cdot dx$

β) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \sigma\nu\nu 3x dx$

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

- B.** Μια εταιρεία κατασκευάζει πλακάκια δαπέδου σχήματος τετραγώνου $OAB\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η τιμή του $\nu \in \mathbb{N}^*$ για την οποία η λευκή επιφάνεια του πλακιδίου, είναι ισοδύναμη με την γραμμοσκιασμένη.



ΘΕΜΑ 3

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(0) = 1$ και $\frac{x}{f(x)} + \frac{1}{f'(x)} = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- A.** Να δείξετε ότι

i) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

ii) $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

- B.** Να υπολογίσετε το $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

ΘΕΜΑ 4

- A.** Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^1 x^\nu \eta\mu(\pi x) dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι

$$I_\nu = \frac{1}{\pi} - \frac{\nu(\nu-1)}{\pi^2} I_{\nu-2}, \nu \geq 2 \text{ και να υπολογίσετε το } I_5.$$

- B.** Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(0) = 1$, παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{2x} = \frac{-f(x)}{x^2+1}, x > 0 \text{ και } f \text{ άρτια.}$$

- i)** Να βρείτε τον τύπο της f στο \mathbb{R} .
- ii)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον $x'x$, τον $y'y$ και την $x=1$.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ