ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Λύσεις στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Γ΄ Λυκείου 2014

ΘΕΜΑ Α
Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 251
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 273.
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150.
Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ
ΘΕΜΑ Β
Β1. Έστω $z = x + iy$, $x, y \in R$

$$2\left(x^2+y^2\right) + 2xi - 4 - 2i = 0 + 0i \Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right) - 4 + (2x-2)i = 0 + 0i \Leftrightarrow$$

$$2\left(x^2+y^2\right) - 4 = 0 \text{ και } 2x - 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ και } y = \pm 1$$

Άρα, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$

Β2. $w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\left(\frac{i(1-i)}{1-i}\right)^{39} = 3(i)^{39} = 3i^3 = -3i$

Β3. Είναι $|u+(-3i)| = |4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow |u-3i| = |4+4i-1+\cancel{i}-\cancel{i}| \Leftrightarrow$

$|u-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow |u-3i| = 5$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$, ακτίνα $\rho = 5$, και η αναλυτική εξίσωση $x^2 + (y-3)^2 = 5^2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $h(x) = \ln e^x - \ln\left(e^x+1\right) = \ln\frac{e^x}{e^x+1} < 0$

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow h''(x) = -\frac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$h''(x) = -\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} < 0$$

Επομένως, η h είναι κοίλη στο R.

Γ2. Είναι $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} < \ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1)$

Η $h''(x) < 0$ άρα η h' γνησίως φθίνουσα στο R, η h γνησίως αύξουσα, οπότε από την τελευταία ανισότητα έχουμε ισοδύναμα:

$$2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{e^x}{e^x+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x + 1 > 2 \Leftrightarrow$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+1}$

Θέτω $u = \frac{e^x}{e^x+1}$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+0} = 1$

Άρα, $u \to 1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{u\to1}\ln u = \ln 1 = 0$

Άρα, $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

Για την πλάγια ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - \ln\left(e^x+1\right)}{x} = 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}$$

Όμως, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right) \underset{u\to1}{\overset{e^x+1=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to1}\ln u = 0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\dfrac{e^x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)\dfrac{1}{x}\right] = 0$, οπότε $\lambda = 1-0 \Rightarrow \lambda = 1$

$\beta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\ln\left(e^x+1\right) = 0$

Η πλάγια ασύμπτωτη $y = x$

Γ4. Είναι $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(x) = e^x\left(h(x)+2\right)+e^x\left(h'(x)\right) = e^x\left[h(x)+h'(x)+2\right] > 0$

Άρα, η Φ γνησίως αύξουσα, οπότε για $x \ge 0$, $\Phi(x) \ge 0$.

$E(\Omega) = \int_0^1 e^x(h(x)+\ln 2)dx = \left[e^x(h(x)+\ln 2)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x)dx =$

$= e(h(1)+\ln 2)-(h(0)+\ln 2)-\int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}dx = e(1-\ln(e+1)+\ln 2)\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1 = e+\ln\dfrac{2}{e+1}(e+1)$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1} = e^0 = 1$

Άρα, η f συνεχής στο 0.

Για $x \ne 0$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Οπότε είναι συνεχής στο R.

$f'(x) = \dfrac{e^x\cdot x-\left(e^x-1\right)}{x^2} = \dfrac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}$

Έστω $g(x) = e^x\cdot x-e^x+1,\ x\in R$

$g'(x) = e^x x+e^x-e^x = e^x x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	↘		↗

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με $g(0) = 0$, άρα $g(x) \ge g(0) = 0$

Οπότε, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} \ge 0 \Rightarrow$ η f γνησίως αύξουσα στο R.

Δ2. α) Έστω $h(x) = \int_1^x f(u)du$.

Αν $u > 0$, τότε $e^u > 1 \Rightarrow e^u-1 > 0 \Rightarrow \dfrac{e^u-1}{u} > 0$

Αν $u < 0$, τότε $e^u < 1 \Rightarrow e^u-1 < 0 \Rightarrow \dfrac{e^u-1}{u} > 0$

Άρα, $f(u) > 0$ για κάθε u πραγματικό.

Οπότε, $h'(x) = f(x) > 0$, η h γνησίως αύξουσα

$h(1) = 0$ αν $h(2f'(x)) = h(1) \Rightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$. Άρα, $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Από την (1) έχουμε: $f'(x)=f'(0)=\frac{1}{2}$, η f' γνησίως αύξουσα οπότε $x=0$ μοναδική λύση.

β΄ τρόπος (Με άτοπο):

Αν υπάρχει $x\neq 0$ που είναι λύση της εξίσωσης και $f'(x)\neq\frac{1}{2}$ τότε $f'(x)>\frac{1}{2}$ ή $f'(x)<\frac{1}{2}$. Οπότε :

αν $f'(x)>\frac{1}{2}$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$,

αν $f'(x)<\frac{1}{2}$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)du<0$.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $x=0$.

β) Είναι $y(t)=f(x(t))=\begin{cases}\frac{e^{x(t)}-1}{x(t)}, & x(t)\neq 0\\ 1, & x(t)=0\end{cases}$

$$y'(t)=\begin{cases} f'(x(t))\cdot x'(t), & x(t)\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x(t)=0\end{cases}$$

$$x'(t)=2y'(t)\Rightarrow y'(t)=\frac{1}{2}x'(t)$$

$f'(x(t))x'(t)=\frac{1}{2}x'(t)\Rightarrow f'(x(t))=f'(0)$ και επειδή f' γνησίως αύξουσα έχουμε: $x(t)=0\Rightarrow y(t)=1$. Οπότε το σημείο είναι $A(0,1)$.

Δ3. $g(x)=(e^x-e)^2(x-2^2)$

$$g'(x)=2(e^x-e)e^x(x-2)^2+2(e^x-e)^2(x-2)=$$

$$=2(e^x-e)(x-2)\cdot\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]=2(e^x-e)(x-2)\left[xe^x-e^x-e\right]$$

Έστω $\phi(x)=xe^x-e^x-e$

φ συνεχής και $\phi(1)=-e<0$, $\phi(2)=2e^2-e^2-e=e^2-e>0$.

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0)=0$

Επίσης, $x>x_0\Rightarrow\phi(x_0)>\phi(x_0)=0$, $x<x_0\Rightarrow\phi(x_0)<\phi(x_0)=0$.

x	0 — 1	1 — x_0	x_0 — 2	2 — $+\infty$
e^x-e	−	+	+	+
$x-2$	−	−	−	+
xe^x-e^x-e	−	−	+	+
$\phi'(x)$	−	+	−	+
ϕ	↘	↗	↘	↗

$x=1$, $x=2$ θέσεις τοπικών ελαχίστων και $x=x_0$ τοπικού μέγιστου.

Επιμέλεια θεμάτων
Κωστής Στρατής, μαθηματικός