ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Ενδεικτικές Λύσεις στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής
Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου 2014

ΘΕΜΑ Α
Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 30
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 13
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 59
Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Β1. $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=12+8+14+6=40$.
Β2.

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i
[2, 4)	3	12	0,3
[4, 6)	5	8	0,2
[6, 8)	7	14	0,35
[8, 10)	9	6	0,15
	Σύνολα	**40**	**1**

Κέντρο κλάσης $\frac{\alpha+\beta}{2}$

$f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$, $i=1,2,3,...,\nu$

$f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{12}{40}=\frac{6}{20}=\frac{30}{100}$

$f_2=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{8}{40}=\frac{4}{20}=\frac{20}{100}$

$f_3=\frac{\nu_3}{\nu}=\frac{14}{40}=\frac{7}{20}=\frac{35}{100}$

$f_4=\frac{\nu_4}{\nu}=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}=\frac{15}{100}$

Β3. α) $\bar{x}=x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4=3\cdot0,3+5\cdot0,2+7\cdot0,35+9\cdot0,15=5,7$

β) Στην κλάση $[4,6]$ ζητάνε πώληση $x>4,5$. Επειδή μέσα σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα για $x>4,5$ έχουμε $\frac{3}{4}\cdot8=6$.

Επίσης, $\nu_3+\nu_4=14+6=20$ διότι στις κλάσεις $[6,8],[8,10]$ έχουμε πωλήσεις μεγαλύτερες από 4,5 χιλιάδες.
Συνεπώς, οι πωλητές είναι $6+20=26$.

ΘΕΜΑ Γ
Γ1. $P(K)=x_1$

$P(A)=x_2$

$f'(x)=12x^2-7x+1$

Η f' είναι τριώνυμο με $\Delta=(-7)^2-4\cdot12\cdot1=49-48=1$, άρα οι σίγουρες θέσεις ακρότατων είναι:

$x=\frac{7\pm1}{24}$. Άρα, $x_1=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

Άρα, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(K)=\frac{1}{4}$

Επίσης, $P(K\cup A\cup\Pi)=1\Leftrightarrow P(K)+P(A)+P(\Pi)=1$ K,A,Π ξένα μεταξύ τους

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+P(\Pi)=1\Leftrightarrow P(\Pi)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(\Pi)=\frac{12-3-4}{12}=\frac{5}{12}$

Γ2. Το Γ είναι το ενδεχόμενο $\Gamma=K\cup A$, K, A ξένα

$P(\Gamma)=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

Το ενδεχόμενο Δ ούτε κόκκινη, ούτε άσπρη, είναι το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι πράσινη.

$\Delta = \Pi$, άρα $P(\Delta) = P(\Pi) = \frac{5}{12}$

Επίσης, $E = A \cup \Pi'$, $P(E) = P(A \cup \Pi') = P(A) + P(\Pi') - P(A \cap \Pi') =$

$= P(A) + 1 - P(\Pi) - (P(A-\Pi)) = P(A) + 1 - P(\Pi) - [P(A)] = 1 - P(\Pi) = \frac{7}{12}$

Γ3. Έστω ν το πλήθος των μπαλών στο δοχείο

$P(\Pi) = \frac{5}{12} \Rightarrow N(\Pi) = \frac{5}{12}\nu$

$P(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow N(A) = \frac{1}{3}\nu$

$N(A) + 4 = N(\Pi) \Rightarrow \frac{\nu}{3} + 4 = \frac{5\nu}{12} \Rightarrow 4\nu + 48 = 5\nu \Rightarrow \boxed{\nu=48}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω y η άλλη διάσταση της βάσης

$2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$

Η συνολική επιφάνεια $E = xy + 2\cdot 5\cdot x + 2\cdot 5\cdot y \Leftrightarrow E = x(10-x) + 10x + 10(10-x)$

Άρα, $E(x) = 10x - x^2 + 10x + 100 - 10x \Rightarrow E(x) = -x^2 + 10x + 100$, $x \in (0,10)$

1ος τρόπος

$E'(x) = -2x + 10$

$E'(x) = -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 10 > 0 \Leftrightarrow x < 5$

$E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 10 < 0 \Leftrightarrow x > 5$

x	0		5		10
$E'(x)$		+	0	−	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

Για $x = 5$ έχουμε μέγιστο.

2ος τρόπος

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι τριώνυμο με $\alpha = -1 < 0$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-10}{-2} = 5$

Δ2. α) Το τριώνυμο $2s^2 - 5s + 2 = 0$ έχει $5^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 9$

$s = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2 \\ s=\frac{1}{2} \end{cases}$

Όμως, $CV > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} > \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s}{8} > \frac{1}{10} \Rightarrow s > \frac{8}{10} > \frac{1}{2}$. Άρα, $s = 2$.

β) $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} = s^2 + (\bar{x})^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} = 4 + 8^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} = 68$

Άρα, $\overline{x^2} = 68$.

Δ3. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης:

$\Omega = \left\{ (x_i, y_i),\ i=1,..,15,\ y_i = -x_i^2 + 10x_i + 100 \text{ με } x_1 = 5,\ x_1 < x_2 < ... < x_{15} = 9 \right\}$

Η συνάρτηση $y = x^2 + 10x + 100$ στο $[5,10]$ είναι γνησίως φθίνουσα και άρα όλα τα y_i είναι διαφορετικά.

Σε κάθε x_i αντιστοιχεί ένα μόνο y_i, $i = 1,..,15$ οπότε $N(\Omega) = 15$.

Το $R = y_1 - y_{15} = |y(5) - y(9)|$

$y(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 + 100 = -25 + 50 + 100 = 125$

$y(9) = -9^2 + 10 \cdot 9 + 100 = -81 + 90 + 100 = 109$

$R = 125 - 109 = 16$

Επίσης, $y > -4x + 9 \cdot 16 + 1 \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 100 > -4x + 145 \Leftrightarrow$

$y > -4x + 9 \cdot 16 + 1 \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 100 > -4x + 145 \Leftrightarrow$

$-x^2 + 14x - 45 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 45 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 9$

Άρα, $A = \{(x_2, y_2)...(x_{14}, y_{14})\}$ και $N(A) = 13$ οπότε $P(A) = \frac{13}{15}$.

Επιμέλεια θεμάτων
Κωστής Στρατής, Μαθηματικός