ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Ενδεικτικές Λύσεις στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 28
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 14
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 87
Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $P(\omega_1) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Είναι $P(\omega_3) = f'(1)$. Όμως $f'(x) = \frac{1}{3}(\ln x + 1) \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$. Άρα $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$.

Β2. Το $A' = \Omega - A = \{\omega_2, \omega_3\}$

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_2) + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$

$P(\omega_2) + P(\omega_4) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_4) = \frac{12-3-4}{12} = \frac{5}{12} \quad (1)$

$A' \cap B \subseteq A' \Rightarrow B - A \subseteq A' \Rightarrow P(B-A) \le P(A') \Rightarrow P(\omega_3) \le P(A') \Rightarrow \frac{1}{3} \le P(A')$

Το $A' \subseteq \Omega - \{\omega_1\} \Rightarrow P(A') \le P(\Omega - \{\omega_1\}) \Rightarrow P(A') \le P(\Omega) - P(\omega_1) \Rightarrow P(A') \le 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$P(A') \le \frac{3}{4}$

Β3. $P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\omega_4) = 0$

Ισχύει $P(\omega_2) + P(\omega_4) = \frac{5}{12} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$

$\Gamma = (A-B) \cup (B-A)$

$P(\Gamma) = P(\omega_4) + P(\omega_3) = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

$E = A' - B' = \{\omega_2, \omega_3\} - \{\omega_2, \omega_4\} = \{\omega_3\}$

$E = \{\omega_3\}$, $P(E) = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω ότι οι κλάσεις είναι:

$[\alpha_1, \alpha_1 + c), [\alpha_1 + c, \alpha_1 + 2c), [\alpha_1 + 2c, \alpha_1 + 3c)$ και $[\alpha_1 + 3c, \alpha_1 + 4c]$ με $\alpha_1 = 50$, $c > 0$

Τότε $x_4 = \frac{\alpha_1 + 3c + \alpha_1 + 4c}{2} \Rightarrow 85 = \frac{100+7c}{2} \Rightarrow 170 - 100 = 7c \Rightarrow 7c = 70 \Rightarrow c = 10$

Γ2. Ο πίνακας είναι

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
$[50, 60)$	$x_1 = 55$	f_1
$[60, 70)$	$x_2 = 65$	f_2
$[70, 80)$	$x_3 = 75$	f_3
$[80, 90)$	$x_4 = 85$	$2f_3$
Σύνολο		1

$f_1 + f_2 + f_3 + 2f_3 = 1 \Rightarrow \boxed{f_1 + f_2 + 3f_3 = 1}$ (1)

Αφού η διάμεσος είναι 75, θα έχουμε $f_1 + f_2 + \frac{f3}{2} = \frac{f3}{2} + 2f_3 \Rightarrow \boxed{f_1 + f_2 = 2f_3}$

Τότε από την (1): $2f_3 + 3f_3 = 1 \Rightarrow 5f_3 = 1 \Rightarrow f_3 = 0,2$, οπότε $f_4 = 0,4$.

Επίσης, $\boxed{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 = 75}$

$55f_1 + 65f_2 + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 = 75 \Rightarrow 55f_1 + 65f_2 + 15 + 34 = 75 \Rightarrow$

$55f_1 + 65f_2 = 75 - 49 \Rightarrow 55f_1 + 65f_2 = 26$

Από το σύστημα $\begin{cases} f_1 + f_2 = 0,4 \\ 55f_1 + 65f_2 = 26 \end{cases}$ παίρνουμε $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,3$. Άρα

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
$[50, 60)$	$x_1 = 55$	0,1
$[60, 70)$	$x_2 = 65$	0,3
$[70, 80)$	$x_3 = 75$	0,2
$[80, 90)$	$x_4 = 85$	0,4
Σύνολο		1

Γ3. *α τρόπος*: Αν ν_1, ν_2, ν_3 οι τιμές x_1, x_2, x_3 στα αντίστοιχα διαστήματα, τότε $\nu_1 = 0,1\nu$, $\nu_2 = 0,3\nu$, $\nu_3 = 0,2\nu$. Άρα

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{x_1 \cdot 0,1\nu + x_2 \cdot 0,3\nu + x_3 \cdot 0,2\nu}{0,1\nu + 0,3\nu + 0,2\nu} =$$

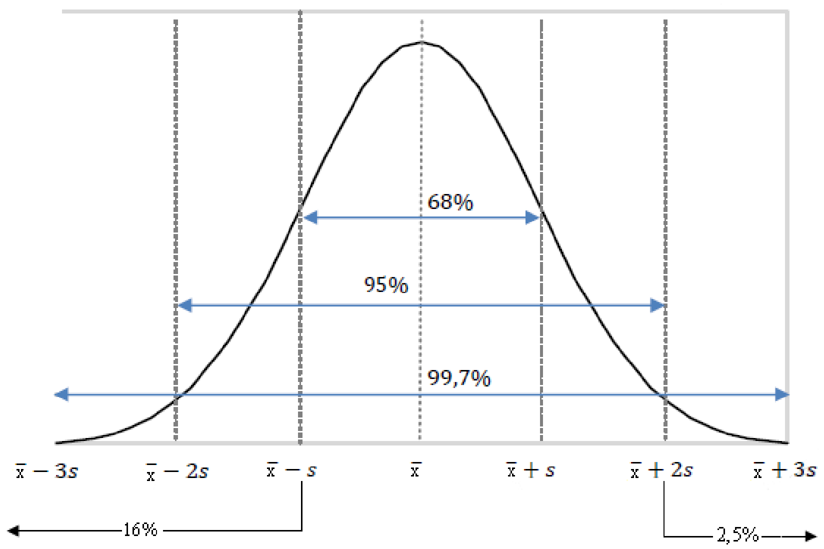
$$\frac{x_1 \cdot 0,1 + x_2 \cdot 0,3 + x_3 \cdot 0,2}{0,6} = \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

β τρόπος: Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\bar{x}_1 = 55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2 = \frac{55}{10} + \frac{65 \cdot 3}{10} + \frac{75 \cdot 2}{10} = \frac{55+195+150}{10} = 40$$

Αυτό αποτελεί το 60% του δείγματος. Άρα $\bar{x} = \frac{100 \cdot 40}{60} \Rightarrow \bar{x} = \frac{200}{3}$

Γ4.



Από το σχήμα έχουμε $\left.\begin{matrix}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{matrix}\right\} \Rightarrow 3s = 6 \Rightarrow s = 2$. Τότε $\bar{x} = 70$

$C_v = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{2}{70} = \dfrac{1}{35} < \dfrac{1}{10}$ είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\varepsilon : y = f(1)x + \beta$

$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(1) = 1$. Άρα $y = x + \beta$ (ε)

Το $(1, f(1)) = (1, \kappa)$ ανήκει στην (ε)

$\kappa = 1 + \beta \Rightarrow \boxed{\beta = \kappa - 1}$

Η (ε) $y = x + (\kappa - 1)$, $\kappa \in Z$

Για $x = 0$ το $y = \kappa - 1$

Για $y = 0$ το $x = 1 - \kappa$

Το εμβαδόν $E = \dfrac{1}{2}|\kappa - 1||1 - \kappa| < 2 \Rightarrow |\kappa - 1|^2 < 4 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow$

$-2 < \kappa - 1 < 2 \Rightarrow -1 < \kappa < 3$, $\kappa \in Z$

Άρα, $\kappa = 0, 1, 2$ και $\kappa > 1$ άρα $\boxed{\kappa = 2}$

Δ2. α) $y = x + 1$. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου ισχύει

$\bar{y} = \bar{x} + 1 \Rightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Rightarrow \bar{x} = 30$

β) Οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_{20}$ αυξάνονται κατά 3, οι $x_{21}, x_{22}, ..., x_{35}$ είναι σταθερές, ενώ οι $x_{36}, x_{37}, ..., x_{50}$ μειώνονται κατά λ.

Όμως $\dfrac{\overset{50}{\Sigma} x}{50} = 30 \Rightarrow \overset{50}{\Sigma} x = 1500$, τότε ο νέος μέσος όρος $\bar{x}' = 31 \Leftrightarrow \dfrac{1500 + 60 - 15\lambda}{50} = 31 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$

Δ3. $\ln\left(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\right) = \ln e^7 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7$

Η $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘		↗	

Ο.Ε. $f\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\ln e^{-1}+2=2-\frac{1}{e}>0$

Επειδή $f \uparrow$ στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ έχουμε $0<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=f'\left(e^{-1}\right)=\ln e^{-1}+1=-1+1=0$

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$. Άρα $f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

$R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$

$\bar{x}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} \Rightarrow \bar{x}=\frac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+2+e+2+0}{5} \Rightarrow$

$\bar{x}=\frac{(\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma)+8+e}{5} \Rightarrow \bar{x}=\frac{7+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}$

Δ4. $f'(t)>0 \Leftrightarrow \ln t+1>0 \Rightarrow t>\frac{1}{e}$

$A=\{t_{11},t_{12},\ldots,t_{30}=1\}$

$f(t)>f'(t)+1 \Rightarrow t\ln t+2>\ln t+1+1 \Leftrightarrow t\ln t>\ln t \Leftrightarrow t\ln t-\ln t>0 \Leftrightarrow$

$(t-1)\ln t>0 \Rightarrow \ln t<0 \Leftrightarrow 0<t<1$

$B=\{t_1,t_2,\ldots,t_{29}\}$

α) $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

β) $A\cap B=\{t_{11},t_{12},\ldots,t_{29}\}$

$P(A\cap B)=\frac{19}{30}$

Επιμέλεια θεμάτων
Κωστής Στρατής, Μαθηματικός