ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $εφα + εφβ + εφγ = εφ^2α + εφ^2β + εφ^2γ = εφ^3α + εφ^3β + εφ^3γ = 1$, να αποδείξετε ότι: $(α - κπ)(β - λπ)(γ - ρπ) = 0$, με $κ, λ, ρ \in Z$.

2. Να λυθεί η εξίσωση
$$(2συνχ - 1)(2συν2χ - 1)(2συν4χ - 1)...(2συν2^{ν-1}χ - 1) = 1, ν \in N$$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $2ημ3χ - συν3χ = 3συνχ$

4. Να λυθεί η εξίσωση: $λημ2χ - \sqrt{2}(λ - 2)συν2χ = \sqrt{2}λημχ, λ \in R$

5. Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $α = 2$. Από την κορυφή Α φέρνουμε μία ευθεία (ε), εξωτερικά του τριγώνου. Έστω $Β_1$ και $Γ_1$ οι προβολές των Β και Γ αντίστοιχα στην ευθεία (ε).

α) Αν $ΒΑΒ_1 = θ$, αποδείξτε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου $ΒΒ_1Γ_1Γ$ δίνεται από τον τύπο: $Ε = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}ημ2θ - συν2θ\right) + \sqrt{3}$

β) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν του τραπεζίου $ΒΒ_1Γ_1Γ$ είναι μέγιστο;

6. Δίνεται ένας κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 1. Θεωρούμε μια χορδή $ΑΒ = \sqrt{3}$ και φέρνουμε τη χορδή ΑΓ, τέτοια ώστε $ΓΑΒ = θ$.

α) Αποδείξτε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $Ρ = \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}ημθ + συνθ\right)$

β) Να βρεθεί η τιμή του θ για την οποία η περίμετρος Ρ είναι μέγιστη.

7. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $γ^4 - 2\left(α^2 + β^2\right)γ^2 + α^4 + α^2β^2 + β^4 = 0$ (1), να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

α) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu B}$ β) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}$

9. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu \Gamma \le \dfrac{1}{8}$ (1)

10. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\eta\mu\dfrac{A}{2}\eta\mu\dfrac{B}{2}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}\le\dfrac{1}{8}$ (1)

11. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu^3 3\chi+\eta\mu^3 2\chi=\eta\mu^2\chi(\eta\mu 3\chi+\eta\mu 2\chi)$

12. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu^3\chi\eta\mu 3\chi+\eta\mu^3\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi=\dfrac{3}{4}$

13. Να λυθεί ως προς θ η εξίσωση:

$\eta\mu 2\theta\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta)-\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu^2(\beta+\theta)-\eta\mu 2\beta\eta\mu^2(\alpha+\theta)=0$ όταν

$\alpha,\beta,\theta\ne\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa\in Z$

14. Να λυθεί η εξίσωση:

$\sigma\upsilon\nu(\chi-\alpha)\sigma\upsilon\nu(\chi-\beta)\sigma\upsilon\nu(\chi-\gamma)=\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\chi$

15. Δίνεται η συνάρτηση: $\Phi(\chi)=1+2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi-2\sigma\upsilon\nu^2\chi$. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

16. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $(\alpha^2+\beta^2)\eta\mu(A-B)=(\alpha^2-\beta^2)\eta\mu\Gamma$, να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

17. Αν $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$, να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\le\eta\mu^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ β) $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\le\eta\mu^3\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

18. Έστω η συνάρτηση $F(\chi) = \pi\chi + \ln\chi$.

α) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\chi = -\pi\chi$ δεν μπορεί να έχει δύο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(\chi^2+2\right) - \ln\left(3\chi\right) < 3\pi\chi - \pi\left(\chi^2+2\right)$

19. Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi) = \ln\left(\sqrt{\chi^2+1} - \chi\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι περιττή συνάρτηση.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία, $F(\chi_1) = F(\chi_2) \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$ για κάθε χ_1, $\chi_2 \in A$.

20. Δίνεται η συνάρτηση: $F(\chi) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία, $F(\chi_1) = F(\chi_2) \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$ για κάθε χ_1, $\chi_2 \in A$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της F ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων είναι η $G(\chi) = \ln\left(\chi + \sqrt{\chi^2+1}\right)$, $\chi \in R$.

21. Δίνεται η συνάρτηση: $F(\chi) = \dfrac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

β) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει $F(\chi) < 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $F(\chi) + F\left(\dfrac{1}{\chi}\right) = \dfrac{10}{3}$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi) = \dfrac{2\ln\chi + 1}{2\ln x - 1}$, $\chi \in A$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in A$, ο αριθμός $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$ είναι στοιχείο του Α.

γ) $F\left(\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right) = F(\alpha) + F(\beta)$