ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

1. Έστω $a,b,c>0$: $a+b+c=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$$

(ΒΑΛΚ. 2012)

2. Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών (a,b,c) που είναι λύσεις της

$$a(a-b-c)+\left(b^2+c^2-bc\right)=4a^2\left(abc-\frac{a^2}{4}-b^2c^2\right)$$

(Προκριμ. Νέων 2012)

3. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη των θετικών p,q που είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση $p^2+2q^2=\left[p^2,q^2\right]-334$, όπου $\left[p^2,q^2\right]$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των p^2,q^2.

(Προκριμ. Νέων 2012)

4. Αν $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ και $x+y+z=2013$ (Ε)

α) Να βρείτε το πλήθος των τριάδων (x,y,z) που είναι λύσεις της (Ε)

β) Να βρείτε λύση: xyz μέγιστο

(Προκριμ. Νέων 2012)

5. Θεωρούμε τους κύκλους K_1,K_2, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α, Β και έστω t μια κοινή εφαπτομένη των κύκλων K_1,K_2 και Μ, Ν τα σημεία επαφής της t με τους κύκλους K_1,K_2 αντίστοιχα. Αν $t\perp AM$ και $MN=2AM$, να υπολογίσετε τη γωνία $\angle NMB$.

(ΒΑΛΚ. ΝΕΩΝ 2012)

6. Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma<B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(0,R)$. Έστω, O_1 το συμμετρικό του Ο ως προς την ΑΓ. Ο κύκλος

$C_1(O_1,R)$ τέμνει την ΒΓ στο Ζ. Αν το ύψος ΑΔ προεκτεινόμενο τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $C(0,R)$ στο σημείο Ε, να δείξετε $E\Gamma \perp AZ$.

(Προκ. διαγ. νέων 2012)

7. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a,b,c, $abc \neq 0$. Να προσδιορίσετε τους x,y,z, αν ισχύουν:

$$\frac{\alpha y+bx}{xy}=\frac{az+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

(Κροατία 2007)

8. Αν $a,b,c,d>0$ και $a+b+c+d=1$ να δείξετε ότι:

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{bcd}{b+2}+\frac{dab}{c+2}+\frac{abc}{d+2}<\frac{1}{13}$$

(Ρουμανία 2002)

9. Δίνονται οι ακέραιοι a,b,c τέτοιοι ώστε $ab+bc+ca=1$. Να αποδείξετε ότι ο $A=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού.

(Ουκρανία 2012)

10. Να βρείτε τον αριθμό των πενταψήφιων θετικών ακεραίων που είναι τέλεια τετράγωνα και έχουν τα δύο τελευταία ψηφία τους ίσα.

(Ρουμανία 1999)

11. Να βρείτε όλες τις τριάδες (x,y,z) θετικών ακεραίων που είναι λύσεις της $99x+100y+101z=2012$

(Εσθονία 2009)