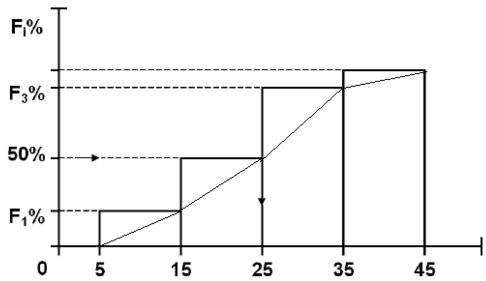
ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Λύσεις στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής
Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου 2012

ΘΕΜΑ Α
Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 31
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 148
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 96
Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Β1. Κάνοντας το ολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, φέρουμε από το 50% του $y'y$ παράλληλη στον $x'x$. Αυτή τέμνει το πολύγωνο σε ένα σημείο που η τετμημένη του είναι 25. Άρα $\delta = 25$.



Β2. Η διάμεσος χωρίζει το δείγμα 50-50. Άρα $\nu_1 + \nu_2 = \nu_3 + \nu_4 \Leftrightarrow$

$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8 - 2 - 4 + 6 \Rightarrow \alpha = 8$.

Ο πίνακας είναι:

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5,15)$	10	12	20	12	20
$[15,25)$	20	18	30	30	50
$[25,35)$	30	24	40	54	90
$[35,45)$	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3. $$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} =$$

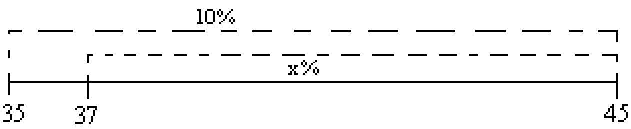
$$= \frac{12+36+72+24}{6} = 2 + 6 + 12 + 4 = 24$$

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2\nu_1 + (x_2-\bar{x})^2\nu_2 + (x_3-\bar{x})^2\nu_3 + (x_4-\bar{x})^2\nu_4}{\nu} \Rightarrow$$

$$S^2 = \frac{(10-24)^2\cdot 12 + (20-24)^2\cdot 18 + (30-24)^2\cdot 24 + (40-24)^2\cdot 6}{60} \Rightarrow$$

$$S^2 = 84 \Rightarrow S = 9{,}17$$

Β4. Μέσα σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα. Έστω $x\%$ το ζητούμενο ποσοστό



Αναλογικά έχουμε $\frac{45-35}{45-37} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 8$

Άρα 8%

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω Γ: ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά
Ι : ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά
$\Gamma \cap I$: ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά και Ισπανικά

$$P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}, \quad P(I) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}, \quad P(\Gamma \cap I) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$$

$\Gamma \cup I$: ο μαθητής μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες

$$P(\Gamma \cup I) = \lim_{x \to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x \to -1} \frac{2\left[x^2+3-4\right]}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{-4}{-1 \cdot 4} = 1$$

Οπότε το ενδεχόμενο $\Gamma \cup I$ είναι βέβαιο.

Γ2.

$$P(\Gamma \cup I) = 1 \Rightarrow P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} = 1 \Rightarrow \frac{3\nu+1}{\nu^2+1} = 1 \Rightarrow \nu^2 = 3\nu \Rightarrow \nu = 3$$

Γ3. $(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)$: ο μαθητής μαθαίνει μία μόνο από τις δύο γλώσσες

$$P\left((\Gamma-I) \cup (I-\Gamma)\right) = P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(I \cap \Gamma) =$$

$$P(\Gamma) + P(I) - 2P(I \cap \Gamma) =$$

$$= \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - 2\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$$

Επειδή $\nu = 3$ έχουμε $P\left((\Gamma-I) \cup (I-\Gamma)\right) = \frac{3}{5}$

Γ4. $P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$$P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{32}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2N(\Omega) = 160 \Rightarrow N(\Omega) = 80$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \dfrac{\left(2\ln x \dfrac{1}{x}\right)x - \left(1+\ln^2 x\right)1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x - 1}{x^2} = \dfrac{-(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0$ άρα η $f \downarrow (0,+\infty)$

Δ2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E(x) = xf(x) \Rightarrow E(x) = 1 + \ln^2 x$, $x > 0$

$E'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, $E'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$E'(x) > 0 \Rightarrow x > 1$ και $E'(x) < 0 \Rightarrow x < 1$

Το πρόσημο της E' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
E'	−	0	+
E	↘		↗

ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Η Ε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, τότε $E(1)=1+\ln^2 1=1$
Άρα το ΟΚΛΜ τετράγωνο.

Δ3. Το $\lambda=f'(1)$
$f'(1)=-1$ Άρα $\varepsilon: y=-x+\beta$
Τα $x_1, x_2, ..., x_{10}$ έχουν $\bar{x}=10$, $S_x=2$
Επειδή $y=-x+\beta$ έχουμε $\bar{y}=-\bar{x}+\beta \Rightarrow \bar{y}=-10+\beta$ και $S_y=|-1|S_x \Rightarrow S_y=2$
(Συνδυασμός εφαρμογής σχολικού βιβλίου)
$CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S_y}{\bar{y}} \le \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{|\beta-10|} \le \frac{1}{10} \Rightarrow |\beta-10| \ge 20 \Rightarrow$
$(\beta-10\ge 20 \text{ ή } \beta-10\le -20) \Leftrightarrow \beta \ge 30$ ή $\beta \le -10$
Δ4. Ισχύουν $A \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A) \le P(A\cup B)$
$A\cap B \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B) \le P(A\cup B)$
Η $f \downarrow (0,+\infty)$ άρα $f(P(A)) \ge f(P(A\cup B))$ (1)
$f(P(A\cap B)) \ge f(P(A\cup B))$ (2)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:
$f(P(A))+f(P(A\cap B)) \ge 2f(P(A\cup B))$

Επιμέλεια θεμάτων
Κωστής Στρατής, Μαθηματικός