ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Λύσεις στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Γ΄ Λυκείου 2012

ΘΕΜΑ Α
Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253.
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 191.
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 258.
Α4. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ
ΘΕΜΑ Β
Β1. *α΄ τρόπος:*

Αν $z = x + iy$, $x, y \in R$ τότε: $(x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1^2$

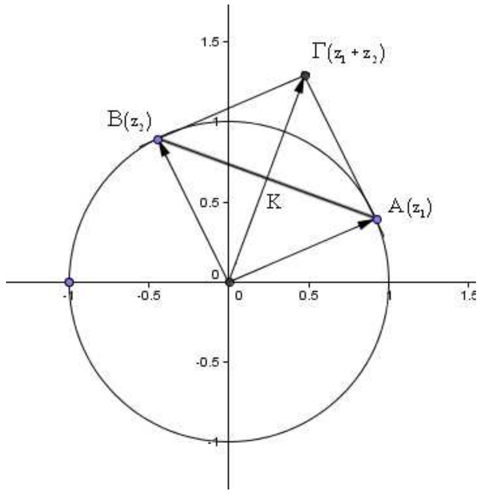
β΄ τρόπος: Έστω $M(z)$, η εικόνα του z και $B(-1,0)$, $A(1,0)$ η (1) γράφεται:

$MB^2 + MA^2 = AB^2 \Leftrightarrow$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΜ που είναι απέναντι από την ΑΒ είναι ορθή, άρα $B\widehat{M}A = 90^o$. Επομένως το ΑΒ φαίνεται από το Μ, υπό ορθή γωνία, οπότε ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Άρα $x^2 + y^2 = 1^2$.

Β2. Το ΟΑΓΒ είναι ρόμβος οπότε οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα στο Κ και διχοτομούνται. Το $BK = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα

$$OK^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow OK^2 = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OK^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow O\Gamma = \sqrt{2}.$$



Β3. Έστω $w = x + iy$, $x, y \in R$.

$$|x+iy-5(x-iy)| = 12 \Rightarrow |x+iy-5x+5yi| = 12 \Rightarrow$$

$$16x^2 + 36y^2 = 144 \Rightarrow \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$, $\gamma^2 = 5$

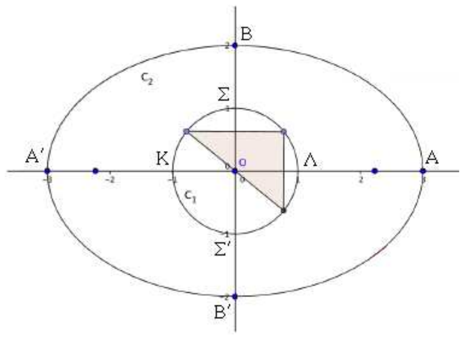
Η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι 3 και η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι 2.

Β4.

$$|z-w| \le |z| + |w| \le |z| + \max|w| = 1 + 3 = 4$$

$$\left(|z-w| \ge ||z|-|w|| \ge ||z|-\min|w|| \ge |1-2| = 1\right)$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι η μέγιστη απόσταση $A'\Lambda$ ή ΚΑ και ελάχιστη ΣΒ ή $\Sigma'B'$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$ Η f αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε: $f'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x} = \frac{x\ln x + (x-1)}{x}$. Είναι $f'(1) = 0$.

Αν $x > 1$ τότε : $\ln x > 0 \Rightarrow x\ln x > 0$ και $x - 1 > 0$ άρα $f'(x) > 0$ οπότε η f ↑

Αν $0 < x < 1$ τότε: $x - 1 < 0$ και $\ln x < 0$ άρα $x\ln x + (x-1) < 0$

Τα παραπάνω φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Για το πεδίο τιμών θα βρούμε τα $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$.

x	0	Δ_1	1	Δ_2	$+\infty$
f′		−	0	+	
f		↘		↗	

Ολικό ελάχιστο το $f(1) = -1$.

$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \right)$, $f(1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1)\ln x - 1 = +\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} (x-1) = -1$.Άρα $f(\Delta_1) = [-1,+\infty)$. Το $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[(x-1)\ln x - 1\right] = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ άρα $f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$. Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$.

Γ2. $x^{x-1} = e^{2013}$ (1)

$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 2012$ (2)

Το $2012 \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1 : f(x_1) = 2012$

Το $2012 \in f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \Delta_2 : f(x_2) = 2012$

Η f είναι μονότονη στα διαστήματα αυτά, άρα η (2) έχει 2 ακριβώς θετικές ρίζες. Επομένως και η ισοδύναμή της (1) έχει ακριβώς 2 ρίζες θετικές.

Γ3. Το x_0 ρίζα της εξίσωσης. $f'(x) + f(x) - 2012 = 0$ ή $f'(x)e^x + f(x)e^x - 2012e^x = 0$.

Επίσης $f(x_1) = 2012$ και $f(x_2) = 2012$. Έστω $h(x) = f(x)e^x - 2012e^x$, $x \in [x_1, x_2]$. Η h συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Η h παραγωγίσιμη με παράγωγο $h'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x - 2012e^x$

$h(x_1) = f(x_1)e^{x_1} - 2012e^{x_1} = 0$, $\quad h(x_2) = f(x_2)e^{x_2} - 2012e^{x_2} = 0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, για την h στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$:

$h(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0)e^{x_0} + f(x_0)e^{x_0} - 2012e^{x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

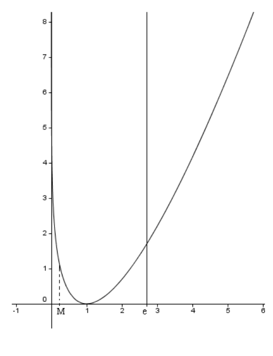
Γ4. Όπως διατυπώνεται, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\int_1^e g(x)dx = \int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$\left(\frac{e^2}{2} - e\right) - 0 - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)dx = \frac{e^2 - 2e}{2} - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e = \frac{e^2 - 2e}{2} - \left[\left(\frac{e^2}{4} - e\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{e^2 - 2e}{2} - \left(\frac{e^2 - 4e}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{e^2 - 3}{4}$$

Σχόλιο: Η εκφώνηση δεν περιγράφει σωστά το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου. Υπάρχει περίπτωση να υπολογίσουμε $\int_M^1 g(x)dx = E(M)$ με $0 < M < 1$ και να πάρουμε $\lim\limits_{M\to 0^+} E(M)$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $f(x) \neq 0$ και ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x - x^2}{e} \geq 0$ (1)

Η g είναι η διαφορά των $\phi(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ και $\frac{x-x^2}{e}$.

Η $\phi(x)$ είναι η σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_1^x f(t)dt$ και x^2-x+1.

Οπότε η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$.

Είναι $g(0)=0$ και $g(1)=0$. Άρα η (1): $g(x)\geq g(0)$ και $g(x)\geq g(1)$.

Η g παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα $x_0=0$, $x_0=1$ και από Θεώρημα Fermat $g'(0)=0$ και $g'(1)=0$. Οπότε $f(1)(-1)-\frac{1}{e}=0$ και $f(1)1-\frac{-1}{e}=0$

$f(1)=\frac{-1}{e}$ και $f(1)=-\frac{1}{e}$. Άρα $f(x)<0$.

Η δοσμένη σχέση: $\ln x-x=\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)$ (3)

Είναι $\ln x\leq x-1<x$ οπότε το πρώτο μέλος της (3) δεν μηδενίζεται, άρα και κάθε όρος του δεύτερου μέλους της (3) είναι μη μηδενικός άρα $f(x)=\frac{\ln x-x}{\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη αφού το δεύτερο μέλος αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Από την (3): $\frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$. Αν θέσουμε $h(x)=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt$, $h(1)=0$ η παραπάνω ισότητα γράφεται:

$h'(x)=h(x)+e\Rightarrow h'(x)-h(x)=e\Rightarrow h'(x)e^{-x}-e^{-x}h(x)=e^{1-x}\Rightarrow$

$\left(h(x)e^{-x}\right)'=\left(-e^{1-x}\right)'\Rightarrow h'(x)e^{-x}=-e^{1-x}+c\Rightarrow h(x)=-e^{1-x}e^x+ce^x\Rightarrow$

$h(x)=-e+ce^x$

$h(1)=0\Rightarrow -e+ce=0\Rightarrow c=1$

Άρα $h(x)=e^x-e\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt=e^x-e\Rightarrow \frac{\ln x-x}{f(x)}=e^x\Rightarrow f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$

Δ2. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{-x}(\ln x-x)=-\infty$

Έστω $f(x)=\upsilon$ αν $x\to 0^+$ τότε $\upsilon\to-\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]=\lim_{\upsilon\to-\infty}\left[\upsilon^2\eta\mu\frac{1}{\upsilon}-\upsilon\right]=\lim_{\upsilon\to-\infty}\left[\upsilon\frac{\eta\mu\frac{1}{\upsilon}}{\frac{1}{\upsilon}}-\upsilon\right]$$

Θέτω $\frac{1}{\upsilon}=t$: $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\frac{\eta\mu t}{t}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\eta\mu t-t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu t-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\eta\mu t}{2}=0$

Δ3. $F'(x)=f(x)$ ενώ $F''(x)=\left(e^{-x}(\ln x-x)\right)'=-e^{-x}(\ln x-x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)=$

$=e^{-x}\left[-\ln x+x+\frac{1}{x}-1\right]=e^{-x}\left[x-1-\ln x+\frac{1}{x}\right]>0$

Άρα η $F''(x)>0$ άρα η F στρέφει τα κοίλα προς τα άνω για $x>0$.

Στα $[x,2x]$, $[2x,3x]$ η F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(x,2x): F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{x}$ και υπάρχει

$\xi_2 \in (2x,3x) : F'(\xi_2) = \dfrac{F(3x)-F(2x)}{x}$. Το $\xi_1 < \xi_2$, η F' γνησίως αύξουσα. Επομένως, $F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Rightarrow \dfrac{F(2x)-F(x)}{x} < \dfrac{F(3x)-F(2x)}{x} \Rightarrow 2F(2x) > F(x) + F(3x)$

Δ4. Έστω $h(x) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(x)$, $x \in [\beta,2\beta]$. Η h συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. $h(\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(\beta) = F(3\beta) - F(\beta) < 0$ διότι $F'(x) = f(x) < 0$ οπότε η F γνησίως φθίνουσα. $h(2\beta) = F(\beta) + F(3\beta) - 2F(2\beta) > 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta) : h(\xi) = 0 \Rightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$. Η h είναι γνησίως μονότονη άρα το ξ είναι μοναδικό, διότι $h'(x) = -2f(x)$.

Επιμέλεια θεμάτων
Κωστής Στρατής, μαθηματικός