ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,1]$ και συνεχής στο 0, και υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=\kappa\in R$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)=\kappa$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\kappa$ ή $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in(0,\delta),\ \delta<1$ ισχύει $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x}-\kappa\right|<\varepsilon$.

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=\kappa$, άρα από τον ορισμό $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in(0,\delta),\delta>0$ και οσοδήποτε μικρό να ισχύει $\left|\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}-\kappa\right|<\varepsilon$ ή $-\varepsilon<\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}-\kappa<\varepsilon$ ή

$$\kappa-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<\kappa+\varepsilon \qquad \text{(I)}$$

Αφού $x\in(0,\delta)$ τότε $\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2^2},\dfrac{x}{2^3},...,\dfrac{x}{2^\nu}\in(0,\delta)$

<u>Σχόλιο</u>
Συνηθισμένο «τρικ» για τη δημιουργία ακολουθίας

Από την (I) παίρνουμε :

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa-\varepsilon_1<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}<\kappa+\varepsilon_1\\
&\kappa-\varepsilon_2<\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)}{\frac{x}{2^2}}<\kappa+\varepsilon_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\kappa-\varepsilon_\nu<\frac{f\left(\frac{x}{2^{\nu-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}{\frac{x}{2^\nu}}<\kappa+\varepsilon_\nu
\end{aligned}\right\}$$

Αν $\varepsilon\le\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_\nu\}$, ισχύουν όλες οι ανισώσεις για ε και $\delta\le\min\{\delta_1,\delta_2,...,\delta_\nu\}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$(\kappa-\varepsilon)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}\right]<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}{x}<(\kappa+\varepsilon)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}\right]$$

$$(\kappa-\varepsilon)\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^\nu-1\right]}{\frac{1}{2}-1}<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}{x}<(\kappa+\varepsilon)\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^\nu-1\right]}{\frac{1}{2}-1}.$$ Τότε

$$\lim_{\nu\to+\infty}(\kappa-\varepsilon)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right]<\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}{x}<(\kappa+\varepsilon)\lim_{\nu\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right]$$

$$(\kappa-\varepsilon)<\frac{f(x)-f(0)}{x}<(\kappa+\varepsilon)$$ ή

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-\kappa\right|<\varepsilon$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x}=\kappa \Leftrightarrow f'(0)=\kappa$