

ΘΕΜΑ 1

A.I) Να αποδείξετε ότι: Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0 \in D_f$ είναι συνεχής στο x_0 .

II) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

ii) Αν η f συνεχής και "1-1" στο \mathbb{R} τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

iii) Αν η f συνεχής και "1-1" στο \mathbb{R} τότε είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} .

iv) Αν η $|f|$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} τότε η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

v) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\epsilon\phi x)}{\epsilon\phi(\eta\mu x)} = 1$.

vi) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, \beta]$ τότε $f((\alpha, \beta]) = [f(\beta), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$.

vii) Υπάρχει μη σταθερή συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R} με σύνολο τιμών το B , $B \subseteq \mathbb{Q}$.

viii) Υπάρχει συνάρτηση που εφάπτεται σε ευθεία σε άπειρα σημεία.

ix) Υπάρχει συνάρτηση που εφάπτεται σε άπειρα σημεία μιας ευθείας των οποίων οι τετμημένες ανήκουν σε διάστημα (α, β) .

B. I) Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) > 0$ και $f'(2) = 0$. Να βρείτε την μονοτονία της $h = f \circ g$ με $g(x) = x^2 - 5x + 8$.

II) Έστω v περιττός φυσικός αριθμός και $I(x) = \int_{-x}^x t^v \ln(1+e^t) dt$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η $I(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

ii) Να βρείτε την $I'(x)$.

iii) Να υπολογίσετε $\int_0^1 I(x) dx$.

ΘΕΜΑ 2

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Δίνεται η παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(5) = 9$, $f(4) = 6$ και

$$f'(x) > -2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Θεωρούμε } g : g(x) = \int_1^x f(t)dt + x^2 - 5x, x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\xi \in (2,3) : \int_1^3 f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt = f(\xi) + 2\xi - 5$

ii) Η g κυρτή στο \mathbb{R} .

iii) $5 < \int_4^5 f(t)dt < 10$

ΘΕΜΑ 3

A. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή f' και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x) - f(x-h) - f(x+h)}{h^2} = e^x + x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε την f'' ,

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

B. Δίνεται g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(g(x) - e)] = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g(x))^e - e^{g(x)}}{g(x) - e}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 f(x)ydy \right) dz = \int_0^1 (3t^2x^3 + 6tx - 1)dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τον τύπο της f .

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii) Να υπολογίσετε $I_1 = \int_{-5}^{13} f^{-1}(x)dx$

iv) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $I_2 = \int_{-1}^3 [f^{-1}(x)]^{10} dx + 10 \int_0^1 x^9 f(x) dx$

Διάρκεια 3h

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ