ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΘΕΜΑ Ι

Α. **i)** Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$ και πότε συνεχής στο Α;

ii) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

iii) Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1. Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. Αν f συνεχής στο $\Delta = [3,4]$ τότε $f(\Delta)$ είναι διάστημα .
3. Αν f συνεχής στο $\Delta = [\alpha,\beta]$ και $f(\Delta) = [3,10]$ τότε η $f \downarrow \Delta$.
4. Αν $z, w \in C$: $|z+w| = |z| + |w|$
5. Αν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή.
6. Αν $z \in C$ και $z = \bar{z}$ τότε $z \in R$.

ΘΕΜΑ ΙΙ

Α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = 2 \text{ και } \mathrm{Im}(z) \ge 0$$

Β) Να αποδείξετε ότι αν η εικόνα του z κινείται στο (Σ) τότε η εικόνα του $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον $x'x$ άξονα.

ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [2,8] \to R$ με $f(x) \ne 0$, $\forall x \in [2,8]$ και ο μιγαδικός $z = f(2)\cdot f(4) + \frac{64}{f(8)} i$.

Αν η εικόνα του z ανήκει στην $y = x$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $f(2)\cdot f(4)\cdot f(8) = 64$

β) $f(x) > 0$, $\forall x \in [2,8]$

γ) Υπάρχει $x_1 \in (2,8) : f(x_1) = 4$

δ) Υπάρχει $\xi \in [2,8] : f(\xi) = \xi$.

ΘΕΜΑ IV

Α. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:

$(x+1)f(x) = 2x^2 + x + \alpha$, $\forall x \neq -1$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -\eta\mu x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi)$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{\nu}}$, $\nu \in N^* - \{1\}$

Β. Έστω $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β) Να αποδείξετε ότι η $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Γ. Έστω $f : R \to R$ η οποία είναι "1−1" και η C_f διέρχεται από τα $A(1,2005)$, $B(-2,1)$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}\left(-2004 + f\left(x^2 - 8\right)\right) = -2$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2h

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ