ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Από τη κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο της $\widehat{\mathrm{A}}_{\varepsilon\xi}$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο αυτή στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Αν Μ μέσον της ΒΓ να δειχθεί ότι:

i) $\Gamma\mathrm{E} = \mathrm{AB} + \mathrm{A}\Gamma$ **ii)** $\Delta\mathrm{M} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Gamma}{2}$ **iii)** $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\mathrm{M} = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο ΑΔ και την εξωτερική Ax της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$. Φέρουμε και τις $\mathrm{BE} \perp \mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{BZ} \perp \mathrm{A}_x$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΕΒΖ ορθογώνιο

β) η ΖΕ είναι παράλληλη στη ΑΓ

γ) η ΖΕ διέρχεται από το μέσον Μ της ΒΓ

δ) $\mathrm{ZM} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Gamma}{2}$

3. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{\mathrm{B}} = 2\widehat{\Gamma}$ και $\alpha = 2\gamma$.

α) Να αποδειχθεί ότι το ΑΒΓ ορθογώνιο

β) Να βρεθούν οι γωνίες Β και Γ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A} = 120^{o}$ και οι διχοτόμοι ΑΔ, ΒΖ τέμνονται στο Ι. Αν ΓΙ τέμνει τη ΔΖ στο Ε, να αποδειχθεί ότι $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 30^{o}$ (υποδ. παράκεντρα).

5. Στο εξωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ είναι το μέσο του ΔΖ, να αποδειχθεί ότι το ΜΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Υποδ.: Να θεωρήσετε σημείο Σ το συμμετρικό του Β ως προς το Μ).

6. Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και τα μέσα Κ και Λ των ΑΒ και ΔΓ και τα μέσα Μ και Ν των ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Αν Ζ είναι το μέσο του ΚΛ και Η το μέσο του ΜΝ να δείξετε ότι:

i) $\mathrm{ZH} \parallel \mathrm{AE}$ **ii)** $\mathrm{AE} = 4\mathrm{ZH}$

7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ το I_α είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των εξωτερικών γωνιών $\widehat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}$, $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων Β και Γ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = 90 + \dfrac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$

β) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}_\alpha\Gamma = 90 - \dfrac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$

γ) $\dfrac{\mathrm{IA}}{\mathrm{I}\Delta} = \dfrac{\mathrm{I}_\alpha \mathrm{A}}{\mathrm{I}_\alpha \Delta} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Gamma}$ (αρμονική τετράδα)

8. Έστω ΒΓ χορδή ενός κύκλου και το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Gamma}$. Από το Α φέρουμε δύο χορδές ΑΗ και ΑΖ που τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ εγγράψιμο.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη του. Αν Η το ορθόκεντρο τότε

i) ΒΔΗΖ, ΓΔΗΕ εγγράψιμα σε κύκλο

ii) Τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διχοτόμοι του $\Delta\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ (ορθικό τρίγωνο).

(Η τετράδα Α,Β,Γ,Η ονομάζεται **ορθόκεντρη**)

10. Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο του. Από την κορυφή Β φέρουμε τη χορδή ΒΔ του κύκλου κάθετη στη ΒΓ. Να δειχθεί ότι:

i) $\mathrm{A}\Delta \perp \mathrm{A}\Gamma$

ii) $\mathrm{B}\Delta = \mathrm{AH}$

iii) $\mathrm{OM} = \dfrac{\mathrm{AH}}{2}$, όπου Μ μέσον της ΒΓ.

11. ***<u>Θεώρημα του Ορθόκεντρου</u>***

Το συμμετρικό του ορθόκεντρου Η του ΑΒΓ ως προς μια πλευρά του είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του.

12. ***<u>Ευθεία Simson</u>***

Οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου στις πλευρές του είναι συνευθειακά σημεία. (*<u>ισχύει και το αντίστροφο</u>*)

13. ***<u>Ευθεία Euler</u>***

Το βαρύκεντρο G, το ορθόκεντρο Η και το περίκεντρο Ο ενός τριγώνου είναι συνευθειακά σημεία.

14. Έστω ΑΒΓΔ ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Από την κορυφή Α φέρουμε μια ευθεία, η οποία τέμνει τη ΓΔ στο Ρ ώστε $\mathrm{B\widehat{A}\Gamma} = \mathrm{\Delta\widehat{A}P}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\mathrm{BA\Gamma} \approx \mathrm{\Delta AP}$ και $\mathrm{\Delta P} = \dfrac{\mathrm{A\Delta \cdot B\Gamma}}{\mathrm{AB}}$

ii) $\mathrm{A\Delta B} \approx \mathrm{A\Gamma P}$ και $\mathrm{\Gamma P} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma \cdot B\Delta}}{\mathrm{AB}}$

iii) $\mathrm{A\Gamma \cdot B\Delta = AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma}$ (**Θεώρημα του Πτολεμαίου**)

15. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μια ευθεία που τέμνει τη ΒΓ στο Δ, την ΑΒ στο Ε και την (προέκταση) ΑΓ στο Ζ. Αν η παράλληλη από το σημείο Γ προς τη ΔΕΖ τέμνει την ΑΒ στο Η να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}} = \dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EH}}$

β) $\dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}} \cdot \dfrac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{ZA}} \cdot \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EB}} = 1$ **(Θεώρημα Μενελάου)**

$\left(\dfrac{\mathrm{B...}}{\mathrm{\Delta...}} \cdot \dfrac{\mathrm{\Gamma...}}{\mathrm{A...}} \cdot \dfrac{\mathrm{A...}}{\mathrm{B...}} = 1 \right)$ *<u>Ισχύει και το αντίστροφο</u>*

<u>Θεώρημα Ceva</u>

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ρ σημείο του επιπέδου. Αν ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ τέμνουν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα Α΄, Β΄, Γ΄ αντίστοιχα, τότε:

$\dfrac{\mathrm{\Gamma' A}}{\mathrm{\Gamma' B}} \cdot \dfrac{\mathrm{A' B}}{\mathrm{A' \Gamma}} \cdot \dfrac{\mathrm{B' \Gamma}}{\mathrm{B' A}} = 1$ (Ισχύει και το αντίστροφο για συντρέχουσες).

16. Αν ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε ισχύει

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{AB \cdot A\Delta + \Gamma B \cdot \Gamma\Delta}}{\mathrm{BA \cdot B\Gamma + \Delta A \cdot \Delta\Gamma}}$$

[(**2^{o} Θεώρημα Πτολεμαίου)** $\mathrm{E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\mathrm{R}}$]

17. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και τη διχοτόμο ΑΔ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ΑΔΜ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $ΒΕ = ΓΖ$.

18. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R. Αν $ΑΔ \perp ΒΓ$, $ΔΕ \perp ΑΒ$ και $ΑΔ = R\sqrt{2}$, να αποδειχθεί ότι $Α\widehat{Ο}Ε = 90^{o}$.

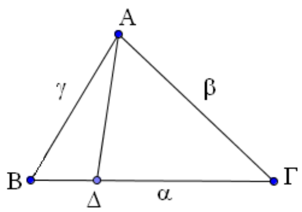
19. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσός του ΑΜ και το βαρύκεντρό του Θ. Αν $ΘΒ^2 + ΘΓ^2 = 2ΘΑ^2$, να αποδειχθεί ότι περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΘΓ εφάπτεται στη πλευρά ΒΓ.

20. **Α. Θεώρημα Stewart**

Αν Δ τυχαίο σημείο της ΒΓ του ΑΒΓ τότε

$\beta^2 ΒΔ + \gamma^2 ΓΔ = \alpha\left[ΑΔ^2 + ΔΒΔΓ\right]$

(Υποδ.: Θεώρημα οξείας και αμβλείας γωνίας)



Β. Με βάση το θεώρημα αυτό αποδείξτε ότι

$\delta_\alpha = \dfrac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}$, δ_α εσωτερική διχοτόμος της Α

$\Delta_\alpha = \dfrac{2}{|\beta-\gamma|}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, Δ_α εξωτερική διχοτόμος της Α.

21. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει περιγεγραμμένο κύκλο (O, R) και εγγεγραμμένο (I, ρ).

Να δείξετε ότι $OI^2 = R^2 - 2R_{\rho}$ ***θεώρημα Euler***

Υποδ.: Αν Μ το σημείο τομής της ΑΙ με τον κύκλο, να εφαρμόσετε τη γενίκευση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

22. Αν ΑΖ, ΓΔ και ΒΕ οι διχοτόμοι του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

23. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν είναι $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{E}$, $(\mathrm{AOB}) = \mathrm{E}_1$ και $(\Delta\mathrm{O}\Gamma) = \mathrm{E}_2$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\mathrm{E}_1} + \sqrt{\mathrm{E}_2} = \sqrt{\mathrm{E}}$.

24. Δύο κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Ένας τρίτος κύκλος C_3 τέμνει τον C_1 στα Β, Γ και τον C_2 στα Δ και Ε. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες ΒΓ και ΔΕ τέμνονται πάνω στην κοινή εξωτερική εφαπτομένη των C_1 και C_2.

(Υποδ.: Ριζικός άξονας δύο κύκλων)