ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Το σύνολο των τιμών της είναι $f(A)=\{y\in R \mid$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x\in A: f(x)=y\}$.

<u>Ο προσδιορισμός του συνόλου τιμών $f(A)$ της $f:A\to R$ ανάγεται στην εύρεση των πραγματικών τιμών της παραμέτρου y για τις οποίες η εξίσωση: $f(x)=y$, με άγνωστο x έχει λύση στο A.</u>

Η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης $f:A\to R$ ούτε εύκολη είναι ούτε πάντοτε δυνατή. Για τις συναρτήσεις $f(x)=x-\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x-x^2$ είναι δύσκολο να βρούμε το πεδίο τιμών τους.

- Γενικά ο προσδιορισμός του συνόλου τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

  α) Με ορισμός, προσδιορίζοντας το σύνολο $f(A)$

  β) Με την βοήθεια των εννοιών του ορίου, της συνέχειας και της μονοτονίας

  γ) Με την βοήθεια των παραγώγων

  δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f . Πράγματι, η προβολή όλων των σημείων της γραφικής παράστασης της f πάνω στον $y'y$ δίνει το σύνολο τιμών της f .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μορφή 1: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\alpha x+\beta$ και $D(f)=R$. Έχουμε $A=R$. Θέτουμε $y=f(x)\Leftrightarrow y=\alpha x+\beta\Leftrightarrow \alpha x+(\beta-y)=0\Leftrightarrow \alpha x=y-\beta$ (1)

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha\neq 0$ τότε $x=\dfrac{y-\beta}{\alpha}$ και άρα $(f)A=R$
- Αν $\alpha=0$ (σταθερή συνάρτηση) η (1) γίνεται : $y=\beta$

Άρα $(f)A=\{\beta\}$

Μορφή 2: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\alpha x+\beta$ και $D(f)\subset R$. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $f(x)=y$ και λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο x. Ζητάμε οι λύσεις να βρίσκονται στο $D(f)$.

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο λύσεων της $f:[-2,1)\to R$ με τύπο $f(x)=3x-5$.

Λύση:

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow 3x-5=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y+5}{3}$

Πρέπει $-2\le x<1 \Leftrightarrow -2\le \dfrac{y+5}{3}<1 \Leftrightarrow y\in[-11,2)$. Άρα $f(A)=[-11,2)$

Μορφή 3: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\gamma\ne 0$, $D(f)=R\setminus\left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$.

Σ' αυτή την περίπτωση θέτουμε $f(x)=y$ και αναζητούμε τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση $f(x)=y$ έχει , ως προς x λύση στο $R\setminus\left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$.

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

Λύση:

Η f έχει πεδίο ορισμού $A=R\setminus\{2\}$.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x-2}=y \Leftrightarrow 3x+1=y(x-2) \Leftrightarrow (y-3)x=2y+1 \quad (1)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον συντελεστή του x:

- Αν $y-3=0 \Leftrightarrow y=3$ η (1) γίνεται $0x=7$ αδύνατη
  Άρα $3\notin f(A)$
- Αν $y-3\ne 0$ τότε $x=\dfrac{2y+1}{y-3}$ που ανήκει στο $R\setminus\{2\}$

Επομένως σύνολο τιμών είναι $f(A)=R\setminus\{3\}$

Μορφή 4: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\gamma\ne 0$ και $D(f)\subset R$. Θέτουμε $f(x)=y$ και λύνουμε ως προς x. Οι λύσεις θα πρέπει να βρίσκονται στο $D(f)$.

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f:(-2,2)\to R$ με τύπο $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-5}$.

Λύση:

Έχουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{2x-5}=y \Leftrightarrow 3x+2=2yx-5y \Leftrightarrow (2y-3)x=5y+2 \quad (1)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον συντελεστή του x:

- Αν $2y-3=0$ δηλαδή $y=\dfrac{3}{2}$ η (1) γίνεται

  $0x=5\dfrac{3}{2}+2$ Αδύνατη. Άρα $\dfrac{3}{2}\notin f(A)$

- Αν $2y-3\neq 0$ δηλαδή $y\neq\dfrac{3}{2}$ η λύση $x=\dfrac{5y+2}{2y-3}$ είναι δεκτή μόνο όταν ικανοποιεί τον περιορισμό $-2<x<2$ (ο περιορισμός προέρχεται από το πεδίο ορισμού) πρέπει λοιπόν

  $$-2<\frac{5y+2}{2y-3}<2 \Leftrightarrow \left|\frac{5y+2}{2y-3}\right|<2 \Leftrightarrow |5y+2|^2<2^2|2y-3|^2 \Leftrightarrow y\in\left(-8,\frac{4}{9}\right)$$

Επομένως, $f(A)=\left(-8,\dfrac{4}{9}\right)$

Μορφή 5: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ και $D(f)=R$. Το σύνολο τιμών της f είναι το:

$f(A)=y \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma=y \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+(\gamma-y)=0 \quad (1)$

Η (1) είναι β΄ βαθμού και έχει λύση στο R αν $\Delta\geq 0$ δηλαδή $\beta^2-4(\gamma-y)\cdot\alpha\geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha y\geq 4\alpha\gamma-\beta^2 \quad (2)$

- Αν $\alpha>0$ τότε $y\geq\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$
- Αν $\alpha<0$ τότε $y\leq\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$

Επομένως $f(A)=\begin{cases}\left[\dfrac{-\Delta}{4\alpha},+\infty\right) & \text{αν } \alpha>0\\ \left(-\infty,\dfrac{-\Delta}{4\alpha}\right) & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$

Μορφή 6: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, $D(f)\subset R$. Σε αυτή την περίπτωση λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ με άγνωστο x και παράμετρο y και **απαιτούμε** μια τουλάχιστον λύση της $f(x)=y$ να ανήκει στο $A=D(f)$.

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f:[2,4)\to R$ με τύπο $f(x)=x^2-4x+3$

Λύση:

Πεδίο ορισμού είναι το $A=[2,4)$

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x^2-4x+3=y \Leftrightarrow x^2-4x+(3-y)=0$ (1)

Η (1) είναι β΄ βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=16-4(3-y) \Leftrightarrow \Delta=4+4y$

Θα πρέπει τώρα $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4+4y\geq 0 \Leftrightarrow y\geq -1$ (2)

Με τον περιορισμό αυτό θα πρέπει οι λύσεις της $f(x)=y$ να ανήκουν στο $[2,4)$ (μία τουλάχιστον)

Είναι όμως:

$$x_1=\frac{4-\sqrt{4(1+y)}}{2} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{4+\sqrt{4(1+y)}}{2}$$

$$x_1=2-\sqrt{1+y} \quad \text{και} \quad x_2=2+\sqrt{1+y}$$

Απαιτούμε τώρα μία τουλάχιστον από αυτές τις ρίζες να ανήκει στο $[2,4)$. Αυτή η απαίτηση μας οδηγεί στις παρακάτω διπλές ανισώσεις

$$2\leq 2-\sqrt{1+y}<4 \quad \text{ή} \quad 2\leq 2+\sqrt{1+y}<4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0\leq -\sqrt{1+y}<2 \text{ (αδύνατη)} \quad \text{ή} \quad 0\leq\sqrt{1+y}<2 \Leftrightarrow y<3 \quad (3)$$

Δηλαδή $y\geq -1$ και $y<3$. Άρα $f(A)=[-1,3)$.

Προσοχή:

Αν εργαζόμαστε «κατασκευστικά» θα είχαμε

$2\leq x<4$ άρα $4\leq x^2<16$ (4)

$2\leq x<4$ άρα $-16<-4x<-8$ (5)

Με πρόσθεση των (4) και (5) παίρνουμε $-12+3<x^2-4x+3<8+3$

Δηλαδή $-9<f(x)<11$. Δεν μας δίνει το πεδίο τιμών αλλά μας λέει $f(A)\subset(-9,11)$

Μορφή 7: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\alpha\neq 0$ και $D(f)\subseteq R$.

i) Σ' αυτή την περίπτωση λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ και απαιτούμε μία τουλάχιστον λύση της να ανήκει στο $D(f)$.

ii) Αν $D(f)=R$ δεν «απαιτούμε» διότι η λύση της $f(x)=y$ (αν υπάρχει) θα ανήκει στο R.

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

Λύση:

Το πεδίο ορισμού είναι $A=R\setminus\{2,3\}$

$f(x)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x+1}{x-3}$ [απλοποιήσαμε **μόνο** τον τύπο **όχι** το πεδίο ορισμού]

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-3}=y\Leftrightarrow x+1=yx-3y\Leftrightarrow (y-1)x=3y+1$ (1)

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $y=1$: $0\cdot x=4$ Αδύνατη άρα $1\notin f(A)$
- Αν $y\neq 1$: $x=\dfrac{3y+1}{y-1}$. Για να ανήκει αυτή η λύση στο A θα πρέπει

$$\left\{\frac{3y+1}{y-1}\neq 2 \quad \text{και} \quad \frac{3y+1}{y-1}\neq 3\right\}\Leftrightarrow\{y\neq -3 \ \text{ και } \ 1\neq -3 \ \text{ που ισχύει}\}$$

Άρα $f(A)=R\setminus\{1,-3\}$

Παρατήρηση: Η (1) είναι πρωτοβάθμια γι΄ αυτό δεν χρειάστηκε να πάρουμε $\Delta\geq 0$, και έπειτα να απαιτήσουμε οι ρίζες x_1, x_2 να ανήκουν στο A.

Μορφή 8: Συνάρτηση με τύπο $f(x)=\alpha+\sqrt{\phi(x)}$ ή $f(x)=\sqrt{\alpha-\sqrt{\phi(x)}}$

Σ' αυτή την περίπτωση βρίσκουμε αρχικά το πεδίο ορισμού A της f και κατόπιν αναζητούμε τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ως προς x λύση στο A.

Ισχύει:

$$\sqrt{\phi(x)}=g(y)\Leftrightarrow\begin{cases} g(y)\geq 0\\ \phi(x)=g^2(y)\end{cases}$$

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=5+\sqrt{x^2-2x+3}$

Λύση:

Πρέπει $x^2-2x+3>0$ όμως $\Delta=-8<0$ και $\alpha=1>0$

Άρα $D(f)=R$

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow 5+\sqrt{x^2-2x+3}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3}=y-5 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y-5\geq 0 \\ x^2-2x+3=(y-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 5 \\ x^2-2x+\left[3-(y-5)^2\right]=0 \end{cases}$$

Η τελευταία έχει λύση μόνο όταν

$\Delta'=4-4\left[3-(y-5)^2\right]\geq 0 \Leftrightarrow 1-3+(y-5)^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$(y-5)^2\geq 2 \Leftrightarrow |y-5|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow y-5>\sqrt{2}$ ή $y-5\leq-\sqrt{2}$

Άρα $y\geq 5+\sqrt{2}$

Επομένως, $f(A)=\left[5+\sqrt{2},+\infty\right)$

Μορφή 9: Σύνολο τιμών συνάρτησης της οποίας ο τύπος περιέχει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\phi(x)$ ή $\sigma\upsilon\nu\phi(x)$. Σ' αυτή την περίπτωση μετατρέπουμε, με τη βοήθεια τύπων τριγωνομετρίας όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που εμφανίζονται στον τύπο της συνάρτησης μόνο σε $\eta\mu\phi(x)$ ή $\sigma\upsilon\nu\phi(x)$ και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς αυτόν τον τριγωνομετρικό αριθμό. Έπειτα χρησιμοποιούμε την συνθήκη $|\eta\mu\phi(x)|\leq 1$ ή $|\sigma\upsilon\nu\phi(x)|\leq 1$ και προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών $f(A)$.

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1+\eta\mu x}{5+4\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση:

Πεδίο ορισμού της f είναι το $A=R$ γιατί $\sigma\upsilon\nu x\geq -1>-\dfrac{5}{4}$

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{1+\eta\mu x}{5+4\sigma\upsilon\nu x}=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5y+4y\sigma\upsilon\nu x=1+\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x-4y\sigma\upsilon\nu x=5y-1$

Χρησιμοποιούμε τώρα ότι

$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\rho\eta\mu\left(x+\phi\right)$ όπου $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Τότε $\rho=\sqrt{1^2+(-4y)^2}=\sqrt{1+16y^2}$

και έχουμε: $\begin{cases}\eta\mu\phi=\dfrac{\beta}{\rho}\\ \sigma\upsilon\nu\phi=\dfrac{\alpha}{\rho}\end{cases}$

$\rho\eta\mu\left(x+\phi\right)=\dfrac{5y-1}{1}\Leftrightarrow\eta\mu\left(x+\phi\right)=\dfrac{5y-1}{\sqrt{1+16y^2}}$: Η λύση αυτή ανήκει στο R αν και μόνο αν:

$$\left|\eta\mu\left(x+\phi\right)\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{5y-1}{\sqrt{1+16y^2}}\right|\le 1\Leftrightarrow\left|5y-1\right|\le\sqrt{1+16y^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(5y-1\right)^2\le 1+16y^2\Leftrightarrow 9y^2-10y\le 0\Leftrightarrow$$

$$y\left(9y-10\right)\le 0\Leftrightarrow 0\le y\le\frac{10}{9}$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=\left[0,\dfrac{10}{9}\right]$

Μορφή 10: Σύνολο τιμών συνάρτησης της οποίας ο τύπος περιέχει εκφράσεις της μορφής $\alpha^{\phi(x)}$ ή $\log_\alpha\phi(x)$ όπου $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$.

Σ' αυτή την περίπτωση, αφού πρώτα βρούμε το πεδίο ορισμού της f, κατόπιν λύνουμε ως προς $\alpha^{\phi(x)}$ και παίρνουμε τον περιορισμό $\alpha^{\phi(x)}>0$ ή αντίστοιχα λύνουμε ως προς $\log_\alpha\phi(x)=y$ και αναζητούμε λύσεις μέσα στο πεδίο ορισμού της $\phi(x)$.

Παράδειγμα: Να βρείτε το σύνολο των τιμών των συναρτήσεων με τύπους

i) $f(x)=\dfrac{1-\alpha^x}{1+\alpha^x}$, $\alpha>0$ ii) $f(x)=\ln\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}$, $\alpha>0$

Λύση:

i) Πεδίο ορισμού της f είναι $A=R$

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{1-\alpha^x}{1+\alpha^x}=y\Leftrightarrow y+y\alpha^x=y-y\alpha^x\Leftrightarrow$

$\left(y+1\right)\cdot\alpha^x=1-y$ (1)

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$: $0=2$ Αδύνατη. Άρα το $(-1)\notin f(A)$
- Αν $y+1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^x=\dfrac{1-y}{y+1}$ και επειδή $\alpha^x>0$ έπεται

$$\frac{1-y}{y+1}>0 \Leftrightarrow (1-y)(1+y)>0 \Leftrightarrow y\in(-1,1)$$

Άρα $f(A)=(-1,1)$

ii) Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}>0 \Leftrightarrow (\alpha-x)(\alpha+x)>0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\alpha,\alpha)$. Άρα $D(f)=(-\alpha,\alpha)$

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \ln\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}=y \Leftrightarrow e^y=\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x} \Leftrightarrow \alpha e^y+xe^y=\alpha-x \Leftrightarrow$

$$\left(1+e^y\right)\cdot x=\alpha\left(1-e^y\right) \Leftrightarrow x=\frac{\alpha\left(1-e^y\right)}{1+e^y}.$$

Για να είναι δεκτή η λύση θα πρέπει να ανήκει στο $D(f)$. Δηλαδή

$$-\alpha<\frac{\alpha\left(1-e^y\right)}{1+e^y}<\alpha \Leftrightarrow -1<\frac{1-e^y}{1+e^y}<1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-e^y}{1+e^y}\right|<1 \Leftrightarrow \left|1-e^y\right|<\left|1+e^y\right| \Leftrightarrow$$

$\left(1-e^y\right)^2<\left(1+e^y\right)^2 \Leftrightarrow 1-2e^y+e^{2y}<1+2e^y+e^{2y} \Leftrightarrow 4e^y>0$, που ισχύει $\forall y\in R$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$f\left(D(f)\right)=R$

Μορφή 11: Σύνολο τιμών συνάρτησης πολλαπλού τύπου.

Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε το σύνολο τιμών κάθε «κλάδου» ξεχωριστά, σαν να πρόκειται για διαφορετικές συναρτήσεις, και κατόπιν παίρνουμε την ένωσή τους, σύμφωνα με την παρακάτω εφαρμογή.

***Εφαρμογή*:**

Έστω συνάρτηση $f:A\to R$. Αν $A_1\subseteq A$, $A_2\subseteq A$

Δείξτε ότι: $f\left(A_1\cup A_2\right)=f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right)$

***Απόδειξη*:** Θα δείξουμε ότι

$$\left.\begin{matrix} f\left(A_1\cup A_2\right)\subseteq f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right) \\ f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right)\subseteq f\left(A_1\cup A_2\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f\left(A_1\cup A_2\right)=f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right)$$

- Έστω $y\in f\left(A_1\cup A_2\right)$. Τότε υπάρχει $x\in A_1\cup A_2$ ώστε $f(x)=y$

Δηλαδή υπάρχει $\left(x \in A_1 \text{ ή } x \in A_2\right)$ ώστε $f(x)=y$

Δηλαδή υπάρχει $\left(x \in A_1 : f(x)=y\right)$ ή $\left(x \in A_2 : f(x)=y\right)$

Άρα $y \in f\left(A_1\right)$ ή $y \in f\left(A_2\right)$

Δηλαδή $y \in f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right)$

Επομένως $f\left(A_1 \cup A_2\right) \subseteq f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right)$ (Ι)

Αντίστροφα:

Έστω $y \in \left(f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right)\right)$ τότε $y \in f\left(A_1\right)$ ή $y \in f\left(A_2\right)$

Δηλαδή υπάρχει $\left(x_1 \in A_1 \text{ και } f\left(x_1\right)=y\right)$ ή $\left(x_2 \in A_2 \text{ και } f\left(x_2\right)=y\right)$

Δηλαδή υπάρχει $x \in \left(A_1 \cup A_2\right)$ και $f(x)=y$

Επομένως $y \in f\left(A_1 \cup A_2\right)$. Άρα

$f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right) \subseteq f\left(A_1 \cup A_2\right)$ (ΙΙ)

Από (Ι) και (ΙΙ) έχουμε

$f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right)$

Γενίκευση:

Έστω f συνάρτηση: $A \to R$

Αν $A_1, A_2, ..., A_\kappa \subseteq A$ τότε

$f\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_\kappa\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right) \cup ... \cup f\left(A_\kappa\right)$

Συντομογραφικά

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\kappa} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\kappa} f\left(A_i\right)$$

- Η απόδειξη με επαγωγή ως προς κ $\left(\kappa \in N\right)$

<u>*Παράδειγμα*</u>: Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

<u>*Λύση*</u>:

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R$, γιατί $1+|x|>0$

Η f γράφεται : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{αν } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Έστω $A_1 = (-\infty, 0)$ και $A_2 = [0, +\infty)$

Τότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Εύρεση του $f(A_1)$

Θέτουμε $f(x) = y$ και $x < 0$. Επομένως

$$\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y - yx \Leftrightarrow x(1+y) = y \quad (1)$$

- Αν $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ τότε η (1): $0 \cdot x = -1$ αδύνατη άρα $(-1) \notin f(A_1)$
- Αν $y + 1 \neq 0$ δηλαδή $y \neq -1$: $x = \dfrac{y}{y+1}$

Η λύση αυτή είναι δεκτή όταν $x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1} < 0 \Leftrightarrow y(y+1) < 0 \Leftrightarrow y \in (-1, 0)$

Άρα $f(A_1) = (-1, 0)$

Εύρεση του $f(A_2)$

Θέτουμε $f(x) = y$ και $x \geq 0$. Επομένως

$$\frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y + yx \Leftrightarrow x(1-y) = y \quad (2)$$

- Αν $1 - y = 0 \Rightarrow y = 1$ η (2) γίνεται $0 \cdot x = 1$ αδύνατη

  Άρα $1 \notin f(A_2)$

- Αν $1 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$: $x = \dfrac{y}{1-y}$ πρέπει $\dfrac{y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow$

  $y \in [0,1) : f(A_2) = [0,1)$:

  Τότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-1,1)$

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

Αν στον τύπο μιας συνάρτησης f υπάρχουν παράμετροι και θέλουμε να τις προσδιορίσουμε, ώστε η f να έχει σύνολο τιμών ένα γνωστό σύνολο Β, εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(A)$ της f, με τη διαδικασία που αναπτύξαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, και το εκφράζουμε ως διάστημα ή ένωση διαστημάτων σε συνάρτηση με τις παραμέτρους.

Παράδειγμα

Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha \neq 0$ και β, ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2\alpha x+\beta}{x^2+1}$ να έχει σύνολο τιμών στο διάστημα $[-1,3]$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το R.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha x+\beta}{x^2+1}=y \Leftrightarrow 2\alpha x+\beta=yx^2+y \Leftrightarrow yx^2-2\alpha x+(y-\beta)=0$ (1)

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον συντελεστή του x^2

- Αν $y=0$ η (1) γίνεται $-2\alpha x-\beta=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}\in R$
- Αν $y\neq 0$ η (1) είναι εξίσωση β΄ βαθμού ως προς x και για να έχει λύση στο R πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2-4y(y-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow y^2-\beta y-\alpha^2 \leq 0$ (2)

  Η τελευταία ανίσωση είναι β΄ βαθμού:

  $\Delta' = \beta^2+4\alpha^2>0$ και έχει ρίζες $y_1=\dfrac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}$ και $y_2=\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}$

  Η (2) αληθεύει όταν $y_1 \leq y \leq y_2$ δηλαδή

  $$y\in\left[\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2},\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}\right]$$

  Άρα $f(A)=\left[\dfrac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2},\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}\right]$

  Επειδή θέλουμε $f(A)=[-1,3]$ πρέπει και αρκεί :

  $$\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}=-1 \quad \text{και} \quad \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}=3$$

  $\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}=-2$ (3) και $\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}=6$ (4)

  Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4)

  $2\beta=4 \Rightarrow \beta=2$

  Για $\beta=2$: $2+\sqrt{4+4\alpha^2}=6 \Rightarrow \alpha^2=3 \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{3}$

  Άρα για $\alpha=\sqrt{3}$ και $\beta=2$ ή $\alpha=-\sqrt{3}$ και $\beta=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων με τύπους :

i) $f(x)=x^2-4x+3$

ii) $f:[-4,1]\to R$ με $f(x)=x^2+6x+5$

iii) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$

iv) $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-1}$

v) $f:[0,4]\to R$ με $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

vi) $f:[1,5]\to R$ με $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

vii) $f:[3,6]\to R$ με $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

viii) $f:[3,11]\to R$ με $f(x)=-\sqrt{x-2}$

ix) $f:(1,2]\to R$ με $f(x)=-x^2+2x+3$

x) $f:[1,3)\to R$ με $f(x)=x^2+5x+6$

2. Ομοίως

i) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+4}$

ii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-4}$

iii) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

iv) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+9}{x^2+2x-9}$

v) $f(x)=3-\sqrt{1-x^2}$

vi) $f(x)=4+\sqrt{x-1}$

vii) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x}}$

viii) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

3. Ομοίως

i) $f(x)=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-3}$

ii) $f(x)=-1+\sqrt{3-\sigma\upsilon\nu x}$

iii) $f(x)=\dfrac{3}{2-45x}$

iv) $f(x)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x+1}$

v) $f(x)=5\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu^2x$ **vi)** $f(x)=\eta\mu^2 2x-4\sigma\upsilon\nu^2x$

vii) $f(x)=\dfrac{\kappa x}{x-1},\ \kappa\in R^*$

4. Ομοίως

i) $f(x)=\dfrac{5^x}{5-5^x}$ **ii)** $f(x)=\dfrac{5+e^x}{5-e^{x+1}}$

iii) $f(x)=\ln\dfrac{x}{3-x}$ **iv)** $f(x)=\log\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

v) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ **vi)** $f(x)=\dfrac{2\cdot 5^x+3}{4\cdot 5^x+7}$

vii) $g(x)=x-\ln\left(1+e^x\right)$ **viii)** $f(x)=5-\ln\left(1+\sqrt{x-3}\right)$

5. Ομοίως

i) $f(x)=\ln\dfrac{e^x}{1-e^x}$ **ii)** $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{[x]-1}$ **iv)** $g(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$

6. Να προσδιορίσετε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων με τύπους

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x\in[1,2) \\ x+2 & \text{αν } x\in[2,4) \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+1 & \text{αν } x\in[0,2) \\ x^2 & \text{αν } x\in[2,7] \end{cases}$

7. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$f(x)=\sqrt{x^2[x]-x+[x]-x^3}$

8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda x+1}{x^2+x+1}$

Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε η f να έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\left[\dfrac{1}{3},3\right]$.

9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-\lambda}$

Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε η f να έχει σύνολο τιμών το R.

10. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x)-xf(2-x)+x=0$ να βρεθεί ο τύπος της και το σύνολο τιμών της.

11. Αν ισχύει $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+2}{x-1}$ να βρεθεί ο τύπος της και το σύνολο τιμών της.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\lambda$.

Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε η f να έχει σύνολο τιμών το $[0,1]$.

13. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\frac{x^2-\lambda x+1}{x^2+x+1}$ να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2,2]$.