ΧΑΤΖΗΜΙΧΑΗΛ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ασκήσεις στις Απόλυτες Τιμές και στις Ρίζες

Άσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, με τη βοήθεια των συνθηκών που δίνονται σε κάθε περίπτωση:

Α= $|\chi-2|-|3-\chi|+2|-\chi|$, $2<\chi<3$

Β= $|\chi+2|-2|\chi+3|+5|\chi|-|\chi+1|$, $-3<\chi<-2$

Γ= $|\alpha-\chi|-|\beta-y|-|\alpha-\beta|-|y-\chi|$, $\chi<\alpha<y<\beta$.

Άσκηση 2

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς τις απόλυτες τιμές:

Α= $3\chi-|\chi-2|$

Β= $|2\chi-1|-\chi+1$

Γ= $|\chi-2|^2-|1-\chi|^2+|\chi+1|$

Δ= $|2-|\chi||$.

Άσκηση 3

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ.

α) Αν $2<\alpha<3$, να γράψετε την παράσταση $\Pi=|2-\alpha|+|\alpha-3|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2+\beta^2\geq 2|\alpha\beta|$ και ii. $\left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}\right)\left(\frac{|\beta|}{|\gamma|}+\frac{|\gamma|}{|\beta|}\right)\left(\frac{|\gamma|}{|\alpha|}+\frac{|\alpha|}{|\gamma|}\right)\geq 8$, με α,β,γ$\neq 0$.

γ) Αν $d(2\alpha,\beta)=d(5\beta,4\alpha)$, να δείξετε ότι: α= β ή α= 2β.

δ) Να δείξετε ότι: $|\alpha+\beta|\leq|\alpha+\gamma|+|\beta-\gamma|$.

ε) Αν α,β$\neq 0$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{|\alpha|}{\alpha}+\frac{|\beta|}{\beta}+\frac{|\alpha\beta|}{\alpha\beta}$.

στ) Να βρείτε τους α,β για τους οποίους ισχύει ότι: $|\alpha+\beta|+|5-5\alpha|=|4\alpha-4|$.

Άσκηση 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ.

α) Αν α<β<γ να δείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A}=|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|$ έχει σταθερή τιμή.

β) Αν $\gamma\in(2,3)$, να δείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{B}=||2\gamma-6|-2|+2\gamma$ έχει σταθερή τιμή.

γ) Να γράψετε την παράσταση $\Pi=3-|\alpha-1|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

δ) Αν $|\alpha|<2$ και $|\beta|<1$ να δείξετε ότι: $|\alpha-2\beta|<4$.

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{|\chi|}{|y|}+\frac{|y|}{\chi}\geq 2$, β) $|\chi-\frac{1}{\chi}|=|\chi|-\frac{1}{|\chi|}$, γ) $|\frac{3\chi+7y}{3y+7\chi}|<1\Leftrightarrow\frac{|\chi|}{|y|}>1$.

Άσκηση 6

Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρανομαστή:

α) $\frac{6}{\sqrt{3}}$, β) $\frac{5}{\sqrt{10}}$, γ) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$, δ) $\frac{2}{\sqrt{\chi+1}-\sqrt{\chi-1}}$, ε) $\frac{\chi}{\sqrt{\chi^2+2\chi}-\chi}$.

Άσκηση 7

Να βάλετε κάτω από μία ρίζα την κάθε παράσταση:

α) $\mathrm{A} = \sqrt[5]{\alpha^2} * \sqrt[4]{\alpha^3} * \sqrt{\alpha}, \alpha > 0$

β) Β= $\dfrac{\sqrt[4]{\alpha^3} * \sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[6]{\alpha^5}}, \alpha > 0$

γ) Γ= $\sqrt{3 * \sqrt[4]{3^3 * \sqrt[3]{3}}}$

δ) Δ= $\sqrt[5]{\alpha * \sqrt{\alpha * \sqrt[3]{\alpha^2}}}$

ε) Ε= $\sqrt[3]{16 * \sqrt[4]{32 * \sqrt[3]{2}}}$

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

Άσκηση 9

α) Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$, $\beta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2} - 1}$, $\gamma = \dfrac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}$ σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

β) Αν $\alpha = \dfrac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$ και $\beta = \sqrt{\sqrt[3]{25} * \sqrt[4]{125} * \sqrt[12]{5^7}}$ να δείξετε ότι: $\alpha = \beta$.

γ) Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ με $\alpha\beta\gamma = 6$ να δείξετε ότι:

i. $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

ii. $(\alpha + 1)(\beta + 2)(\gamma + 3) \geq 48$

δ) Αν $\alpha = \sqrt{7} + 1$, $\beta = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ και $\gamma = \sqrt{5} + 2$, να δείξετε ότι α<β<γ.

Άσκηση 10

Έστω οι αριθμοί $\alpha = 2 - \sqrt{3}$ και $\beta = 2 + \sqrt{3}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\mathrm{A} = \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \alpha$

γ) Να δείξετε ότι: $\beta > \sqrt{2} + \sqrt{5} > 2\alpha$

δ) Να δείξετε ότι: $\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha} - \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} = 4\sqrt{2}$.