Παράγραφος 1.5
Πολλαπλάσια Αριθμού και Ε.Κ.Π.

Νικόλαος Βρουλιώτης

Νοέμβριος 2019

Θεωρία

Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού

Τι ονομάζουμε **πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού α ;

Τα πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού α είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του α με όλους τους φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή, τα πολλαπλάσια του α, είναι η προπαίδεια του α:

$0 \cdot \alpha = 0 \qquad 1 \cdot \alpha = \alpha \qquad 2 \cdot \alpha = 2\alpha \qquad 3 \cdot \alpha = 3\alpha \qquad 4 \cdot \alpha = 4\alpha \qquad \ldots$

Παραδείγματα

Για παράδειγμα, παρακάτω φαίνονται τα **11 πρώτα** πολλαπλάσια των φυσικών αριθμών 2, 3, 6 και 8 :

1) Πολλπλάσια του 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

2) Πολλαπλάσια του 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33

3) Πολλαπλάσια του 6: 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66

4) Πολλαπλάσια του 8: 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)

Τι ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** ;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο και περισσότερων φυσικών αριθμών είναι το μικρότερο και μη μηδενικό πολλάπλάσιο από τα κοινά πολλάπλάσια των αριθμών αυτών.

Παραδείγματα

1) Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 2 και 3 είναι: $EK\Pi(2,3) = 6$

2) Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 6 και 8 είναι: $EK\Pi(6,8) = 24$

3) Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 6 και 8 είναι: $EK\Pi(2,6,8) = 24$

4) Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 3, 6 και 8 είναι: $EK\Pi(3,6,8) = 24$

Προβλήματα

1) Δύο πλοία επισκέπτονται την Μυτιλήνη. Το πρώτο πλοίο έρχεται στο λιμάνι της Μυτιλήνης ανά 3 ημέρες. Το δεύτερο πλοίο έρχεται ανά 4 ημέρες. Αν τα δύο πλοία ξεκίνησαν από το λιμάνι ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι της Μυτιλήνης;

Λύση: Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4. Είναι:

Πολλαπλάσια του 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, ...

Πολλαπλάσια του 4: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, ...

Οι αριθμοί: 0, 12, 24, 36, ... είναι **κοινά** πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4. Όμως, το μικρότερο και μη μηδενικό πολλαπλάσιο που έχουν ίδιο οι αριθμοί 3 και 4 είναι ο αριθμός 12. Άρα το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των 3 και 4 είναι το 12 και γράφουμε: $EK\Pi(3,4) = 12$.

Έτσι, βρήκαμε ότι τα δύο πλοία θα συναντηθούν ξανά στο λιμάνι της Μυτιλήνης, μετά από 12 ημέρες. Επίσης, αυτή η συνάντηση θα επαναλαμβάνεται κάθε 12 ημέρες.

2) Σε ένα μαγαζί ρούχων, η Ασημίνα πηγαίνει κάθε 10 ημέρες, ενώ η Κωνσταντίνα πηγαίνει κάθε 12 ημέρες. Αν οι δύο φίλες συναντήθηκαν σε αυτό το μαγαζί στις 2 Οκτωβρίου, πότε θα συναντηθούν ξανά; Πριν την δεύτερη συνάντηση των δύο φιλενάδων, πόσες φορές είχε πάει η καθεμιά μόνη της στο συγκεκριμένο μαγαζί;

Λύση: Οι συνολικές ημέρες που θα περάσουν για να συναντηθούν ξανά οι δύο φίλες στο μαγαζί, πρέπει να είναι **κοινό πολλαπλάσιο** του 10 και του 12. Τα πολλαπλάσια του 10 και του 12 είναι:

Πολλαπλάσια του 10: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, ...

Πολλαπλάσια του 12: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120,...

Βλέπουμε ότι το πιο μικρό και μη μδενικό πολλαπλάσιο που είναι κοινό και στους δύο αριθμούς, είναι το 60. Άρα, οι δύο φίλες θα συναντηθούν ξανά στο μαγαζί μετά από **60 ημέρες**.

Αφού η τελευταία φορά που συναντήθηκαν ήταν στις 2 Οκτωβρίου, τότε για να βρούμε την ημερομηνία που θα συναντηθούν ξανά, σκεφτόμαστε ως εξής:

Ο Οκτώβριος έχει 31 ημέρες, όμως αρχίζουμε να μετράμε μετά τις 2 Οκτωβρίου, δηλαδή: $31 - 2 = 29$ ημέρες.

Ο Νοέμβριος έχει 30 ημέρες και εάν προσθέσουμε και τις 29 του Οκτωβρίου έχουμε $30 + 29 = 59$ ημέρες. Μας μένει ακόμα μία ημέρα, που θα την πάρουμε από τον Δεκέμβριο.

Τελικά, οι δύο φίλες **θα συναντηθούν ξανά την 1η Δεκεμβρίου**.

Για να βρούμε πόσες φορές έχει πάει η καθεμιά μόνη της στο μαγαζί, στο διάστημα που μεσολάβησε μεταξύ των δύο συναντήσεων, μετράμε τα πολλαπλάσια μεταξύ του 0 και του 60 για τους αριθμούς 10 και 12.

Για τον αριθμό 10, τα πολλαπλάσια μεταξύ του 0 και του 60 είναι τα: 10, 20, 30, 40, 50. Που είναι **5 πολλαπλάσια**. Δηλαδή, η Ασημίνα πήγε 5 φορές μόνη της στο μαγαζί.

Για τον αριθμό 12, τα πολλαπλάσια μεταξύ του 0 και του 60 είναι τα: 12, 24, 36, 48. Που είναι **4 πολλαπλάσια**. Δηλαδή, η Κωνσταντίνα πήγε 4 φορές μόνης στο μαγαζί.

Μερικά Σχόλια

1) Από τα προηγούμενα μπορούμε να καταλάβουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός α έχει ως πολλαπλάσια, τους αριθμούς 0 και α. Με άλλα λόγια, για έναν φυσικό αριθμό, ακόμα κι εάν δεν ξέρουμε τα πολλαπλάσιά του (δηλαδή την προπαίδεια του αριθμού αυτού), ξέρουμε σίγουρα τα δύο πρώτα πολλαπλάσιά του. Το ένα είναι το 0 και το άλλο είναι ο ίδιος ο αριθμός.

Π.χ. Για τον αριθμό 2.364 ξέρουμε ότι έχει πολλαπλάσια το 0 και το 2.364. Αυτό γιατί $0 \cdot 2.364 = 0$ και $1 \cdot 2.364 = 2.364$

2) Για έναν φυσικό αριθμό α, εάν εξαιρέσουμε τα δύο πρώτα πολλαπλάσια που έχει (δηλαδή το 0 και τον ίδιο τον α), τότε τα υπόλοιπα πολλαπλάσια, είναι αριθμοί πιο μεγάλοι από τον α.

3) Από το 1ο Σχόλιο, καταλαβαίνουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν ένα **κοινό πολλαπλάσιο**. Αυτό το πολλαπλάσιο είναι το 0. Γιατί τότε χρειάζεται να μιλήσουμε για το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο αφού το 0 είναι και κοινό (το έχουν όλοι) και ελάχιστο (είναι το πιο μικρό) πολλαπλάσιο;

Απάντηση: Εμείς ξεκινήσαμε να μιλάμε για το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) λέγοντας ότι αυτό **δεν είναι το μηδεν**! Εάν το Ε.Κ.Π. ήταν το μηδέν, τότε δεν θα είχε ενδιαφέρον να ασχοληθούμε με αυτό! Άρα το Ε.Κ.Π. δεν είναι το μηδέν γιατί **ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ !**

4) Από το 2ο σχόλιο, αφού όλα τα πολλαπλάσια ενός αριθμού α, εκτός από τα δύο πρώτα, είναι πιο μεγάλα από τον α, γιατί εμείς ασχολούμαστε με το ελάχιστο (δηλαδή το πιο μικρό) κοινό πολλαπλάσιο;

Απάντηση: Τα πολλαπλάσια ενός αριθμού είναι άπειρα, κι έτσι δεν τελειώνουν ποτέ! Επομένως, αν αντί για το Ελάχιστο, ψάχναμε το Μέγιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δύο αριθμών τότε θα ψάχναμε συνέχεια, χωρίς να σταματήσουμε ποτέ και πάλι δεν θα το βρίσκαμε! Έτσι, δεν υπάρχει το Μέγιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και δεν ψάχνουμε για αυτό γιατί **ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΝΟΗΜΑ**!

5) Επειδή όλα τα πολλαπλάσια του 0 κάνουν 0, το Ε.Κ.Π. του 0 με έναν αριθμό α είναι: Ε.Κ.Π.$(\alpha, 0) = 0$. Είπαμε όμως, ότι το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών δεν είναι ποτέ μηδέν! Έτσι δεν βάζουμε ποτέ μέσα στο Ε.Κ.Π. το μηδέν!

6) Εάν για δύο φυσικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι Ε.Κ.Π.$(\alpha, \beta) = \beta$ τότε ο β είναι πολλαπλάσιο του α.

Π.χ. Ισχύει ότι $6 = 3 \cdot 2$ άρα το 6 είναι πολλαπλάσιο του 2, κι έτσι Ε.Κ.Π.$(2, 6) = 6$. Επίσης, ισχύει Ε.Κ.Π.$(3, 6) = 6$ γιατί το 6 είναι και πολλαπλάσιο του 3.

Ασκήσεις

1) Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1. Τα πολλαπλάσια του 2 λέγονται άρτιοι αριθμοί Σ Λ
2. Τα πολλαπλάσια του 3 λέγονται περιττοί αριθμοί Σ Λ
3. Το 6 είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο του 2 και του 3 Σ Λ
4. Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο ορίζεται μόνο για δύο αριθμούς Σ Λ
5. Εάν ο α δεν είναι το μηδέν, τότε Ε.Κ.Π.$(1, \alpha) = \alpha$ Σ Λ
6. Η τέλεια διαίρεση $\Delta = \delta \cdot \pi$ μας λέει ότι ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ Σ Λ

2) Να βρείτε τα **11 πρώτα** πολλαπλάσια των αριθμών 4, 5 και 7. Στη συνέχεια να βρείτε τα Ε.Κ.Π.$(4, 5)$, Ε.Κ.Π.$(5, 7)$ και Ε.Κ.Π.$(4, 5, 7)$.

3) Από έναν ηλεκτρικό σταθμό, ξεκινάνε ταυτόχρονα τρία τρένα, κάνοντας τρείς διαφορετικές διαδρομές Α, Β και Γ. Αν γνωρίζετε ότι στη διαδρομή Α τα τρένα φτάνουν στον σταθμό μετά από 10 λεπτά, στη διαδρομή Β μετά από 12 λεπτά και στη διαδρομή Γ μετά από 15 λεπτα, μετά από πόση ώρα θα βρεθούν τα τρία τρένα ταυτόχρονα στον σταθμό;