ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ f ΑΝ $f^2(x)=g(x),\ \forall x\in \mathrm{A}\subseteq R$

Παρατηρούμε ότι $g(x)\geq 0$.

Επίσης, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε $f(x)=\sqrt{g(x)}$ $\quad \forall x\in \mathrm{A}$ ή $f(x)=-\sqrt{g(x)}$

Γενικά, υπάρχουν άπειρες τέτοιες όπου

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{g(x)} & , x\in \mathrm{A}_1\\ -\sqrt{g(x)} & , x\in \mathrm{A}_2\end{cases} \quad \mathrm{A}_1\cup \mathrm{A}_2=\mathrm{A} \quad \text{και} \quad \mathrm{A}_1\cap \mathrm{A}_2=\varnothing .$$

Από αυτές κάποιες είναι συνεχείς.

Παράδειγμα 1

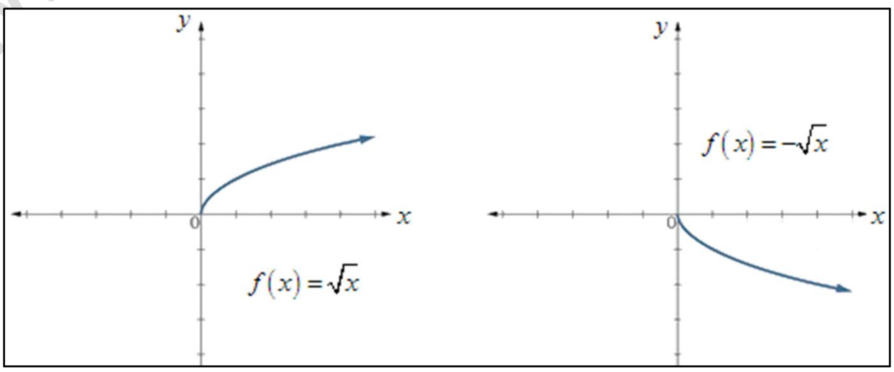
Να βρεθεί συνεχής f: $f^2(x)=x$, $x\geq 0$

Λύση

$$\left(f^2(x)=x,\forall x\in R_f\right)\Leftrightarrow\left(\left|f(x)\right|=\sqrt{x},\forall x\in[0,+\infty)\right)$$

Αν $f(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$, άρα η f μηδενίζεται μόνο στο $x=0$. Στο $[0,+\infty)$ διατηρεί πρόσημο

$$\left(\left|f(x)\right|=\sqrt{x},\forall x\geq 0\right)\Leftrightarrow\left(f(x)=\sqrt{x},\forall x\geq 0\right) \text{ ή } \left(f(x)=-\sqrt{x},\forall x\geq 0\right)$$



Παράδειγμα 2

Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f :

$$f^2(x) = \eta\mu^2 x\,, \quad x \in [0, 2\pi] \qquad (\mathrm{I})$$

Λύση

Έστω f τέτοια ώστε να ισχύει η (I)

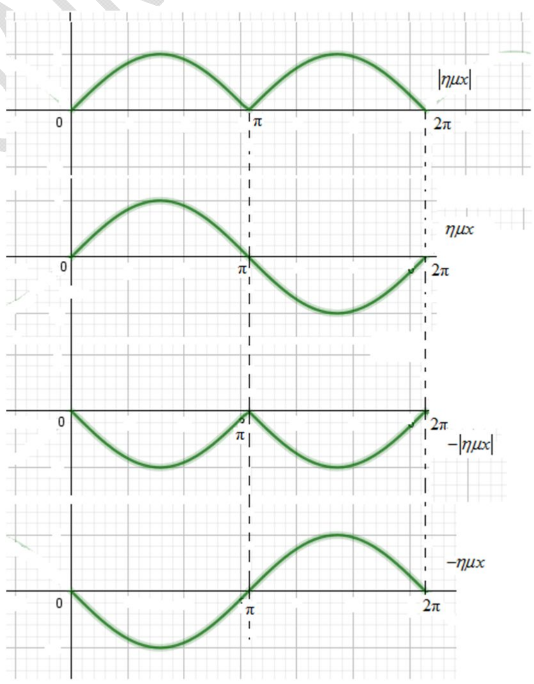
$f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x|$

Αν $f(x) = 0 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \ \text{ή} \ x = \pi \ \text{ή} \ x = 2\pi)$

Στα $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ η f διατηρεί πρόσημο.

πρόσημο της f	0 $\qquad$ π	2π
πρόσημο της f	$+$	$-$
πρόσημο της f	$-$	$-$
πρόσημο της f	$-$	$+$

Οι γραφικές παραστάσεις είναι:



Παράδειγμα 3

Να βρείτε f συνεχής στο R , τέτοια ώστε:

$$f^2(x)-8f(x)+15=0,\ \forall x\in R \qquad (\text{I})$$

Λύση

Έστω f μια τέτοια συνάρτηση.

Η $(\text{I}) \Leftrightarrow (f(x)-3)(f(x)-5)=0,\ \forall x\in R$

$\Leftrightarrow [f(x)=3 \text{ ή } f(x)=5],\ \forall x\in R$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_1, x_2 \in R$

$f(x_1)=3$ και $f(x_2)=5$, $x_1 \neq x_2$

Τότε η f (ως συνεχής) θα έπαιρνε και όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ ή $x_0 \in (x_2, x_1)$ τέτοιο που $f(x_0)=4$

Για $x=x_0$ στην (I):

$f^2(x_0)-8f(x_0)+15=0 \Leftrightarrow 4^2-8\cdot 4+15=0 \Leftrightarrow -16+15=0$ (άτοπο)

Άρα, η $f(x)=3\ \forall x\in R$ ή $f(x)=5\ \forall x\in R$

(Δεν μπορεί να είναι πολλαπλού τύπου)

Παράδειγμα 4

Αν f συνεχής και $f(x) \neq x$, $\forall x \in R$, $f(0)=1$, και

$$\frac{f(x)-x}{e^x}+\frac{e^x}{x-f(x)}=0 \qquad (\mathrm{I})$$

να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Η $(\mathrm{I}):(f(x)-x)^2=e^{2x} \Leftrightarrow$

$$|f(x)-x|=e^x \qquad (\mathrm{II})$$

Αν $g(x)=f(x)-x$ συνεχής, δεν μηδενίζεται, άρα διατηρεί πρόσημο.

$g(0)=f(0)-0=1>0$

Άρα, $g(x)>0$

Η $(\mathrm{II}):|g(x)|=e^x \Leftrightarrow g(x)=e^x \Leftrightarrow f(x)-x=e^x \Leftrightarrow f(x)=e^x+x$

Γενικότερο θέμα

Να βρείτε τις συνεχείς f:

$$\left[f(x)-g(x)\right]\cdot\left[f(x)-h(x)\right]=0,\ x\in R \qquad (\mathrm{I})$$

α) Αν $g(x)=h(x)$ **δεν έχουν κοινή ρίζα** (δεν τέμνονται), από (Ι):

$\left[f(x)=g(x)\ \forall x\in R \text{ ή } f(x)=h(x)\right], \forall x\in R$

Υπάρχουν μόνο δύο.

β) Αν $g(x)=h(x)$ **έχει μόνο μία ρίζα** ρ τότε:

$f(x)=g(x)\ \forall x\in R$ ή $f(x)=h(x),\ \forall x\in R$

$$f(x)=\begin{cases} g(x), x\le\rho \\ h(x), x>\rho \end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases} h(x), x\le\rho \\ g(x), x>\rho \end{cases}$$

Υπάρχουν τέσσερις.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι συνεχείς f:

$$f^2(x)-(x+1)f(x)+x=0 \qquad (\mathrm{I})$$

Λύση

Έστω f μια τέτοια συνάρτηση που ικανοποιεί την (Ι)

Η (Ι) $\Leftrightarrow \left(f(x)-1\right)\left(f(x)-x\right)=0,\ \forall x\in R$

$\Leftrightarrow \left[f(x)=1 \text{ ή } f(x)=x\right]\ \forall x\in R$

Η $g(x)=1$ και $h(x)=x$ έχουν ένα κοινό σημείο το $\rho=1$, οπότε οι δυνατοί τύποι της είναι f τέσσερις (4). Άρα,

$$f(x)=1,\ f(x)=x,\ f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 1 \\ x, & x>1 \end{cases},\ f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Γενίκευση:

Για $\left(f(x)-g(x)\right)\left(f(x)-h(x)\right)=0$, f συνεχής και η εξίσωση $g(x)=h(x)$ έχει ν διαφορετικές ρίζες, τότε το πλήθος των συνεχών συναρτήσεων είναι $2^{\nu+1}$.