ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ (ΕΥΘΕΙΑ ).

## ΘΕΜΑ. Ι

Α.α) Έστω χ(1+2κ)+(1-κ)ψ+2κ+7=0 κεR , να δείξετε η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

β)ποια από όλες αυτές απέχει περισσότερο από το (ο,ο).

Β)Έστω λ>ο, θεωρούμε ορθή γωνία, ΧΟΨ και τα μεταβλητά σημεία Α,Β της ΟΧ, ΟΨ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΑ+ΟΒ=λ

Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο.

## *ΘΕΜΑ ΙΙ.*

Α) Έστω (ε): $(\lambda^2+\lambda-2)\chi+(\lambda^2-4)\psi+\lambda.(\lambda+2)=0$ .

Να βρείτε το λ ώστε

α)Η ε να παριστάνει ευθεία.

β) ε//Χ-άξονα.

γ)Η ε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) ε//Ψ-άξονα.

Β)Δίνονται οι ευθείες ε : ψ=λχ+β και α : ψ=λχ+κ. Να δείξετε ότι

d(ε,α)= $\dfrac{/\beta-\kappa/}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ .

## *ΘΕΜΑ ΙΙΙ.*

Α)Έστω Ο(0,0) , Α(-2β/α, 0), Β(1,-α/β ) τα σημεία. Να δείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΟ και να βρείτε το εμβαδόν του.

Β)Να βρεθεί η εξίσωση της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις 3χ+4ψ=2 και 5χ-12ψ=0.

Γ)Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ που σχηματίζει με τα σημεία Α(2,-1), Β(-1,3) τρίγωνο με (ΑΒΜ)=4.

## *ΘΕΜΑ ΙV.*

Α)Να βρείτε τις τιμές των λ,μ ε R για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1$:

x+μψ+1=0 και $\varepsilon_2$: 2μχ+2ψ+λ=0 είναι παράλληλες και η απόσταση τους είναι $2\sqrt{2}$

.Β)Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων ΟΧΨ ένα πλοιάριο ξεκινά από ένα λιμάνι Α και κατευθύνεται στο λιμάνι Ο .Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοιάριο (2t-40, t-30) ,t>/0.

α)Που βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι Α;

β)Πόσο απέχει το λιμάνι Α από το Ο;

γ)Ποια είναι η εξίσωση της πορείας του πλοιαρίου;

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ.

*Τηλ 45780*

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ (Τ. Κ)

## *ΘΕΜΑ Ι*

Α)Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις: i)Η εξίσωση $\frac{x^2}{36-\lambda}+\frac{\psi^2}{9-\lambda}=1$ παριστάνει έλλειψη:

Α) : λ>9 Β) : λ⟨9 Γ) : 9⟨λ⟨36 Δ ) λεR

Β)Αν η εξίσωση $\kappa\chi^2+\lambda\psi^2=1$ με κ>λ>0 παριστάνει έλλειψη, τότε το $\varepsilon^2$ είναι ίσο με:

Α : κ-λ Β: (κ-λ)/λκ Γ: 1-λ/κ Ε : κ λ

Γ)Η εξίσωση $\frac{x^2}{a}-\frac{\psi^2}{\beta}=\gamma$ παριστάνει υπερβολή όταν

Α: αβ≠0 Β : αβ>0 Γ : αβ<0 Δ : γ=1 Ε : κανένα από τα προηγούμενα.

Δ) Η παραβολή $\psi^2=(\lambda^2-5\lambda+6)\chi$ έχει όλα τα σημεία της στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο αν

Α: λ=1/2 Β: λεR Γ : λ>0 Δ: λ>1/2 Ε :2<λ<3

## *ΘΕΜΑ ΙΙ*

Α)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $\psi^2=4\chi$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ψ=χ-1.

Β)Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Α(3,5) Β(2,-4) Γ(-5,-1).Να δειχτεί , οτι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(\text{ΜΑ})^2+(\text{ΜΒ})^2+(\text{ΜΓ})^2=107$ είναι κύκλος , και να βρείτε το κέντρο του.

## *ΘΕΜΑ ΙΙΙ*

Α)Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες στον χ-άξονα και Ε(4,0), ε = 0,8.

Το σημείο με συντεταγμένες χ=5ημχ, ψ=3συνχ ανήκει στην παραπάνω έλλειψη;

Β)ι) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $X^2+\Psi^2-X+2\Psi-2=0$ παριστάνει κύκλο

ιι)Να προσδιορίσετε το κ ώστε το κέντρο του κύκλου να ανήκει στην ευθεία (3κ+1)χ-5κψ=8.

## *ΘΕΜΑ ΙV*

Αι).Δίνετε η εξίσωση $4\chi^2-9\psi^2=36$ ,δείξτε ότι παριστάνει υπερβολή και να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα της. ιι)Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραπάνω υπερβολής που άγονται από το σημείο Α(3,4).

Β.Έστω $\overrightarrow{OM}=(2\chi-3)\vec{i}+(2\psi-1)\vec{j}..x,\psi\in\Re$ ./Να αποδείξετε ότι ο γ.τ των σημείων Ν(χ,ψ) για τα οποία ισχύει $\left|2\overrightarrow{OM}-1\vec{i}+3\vec{j}\right|=3$, είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του. Να βρείτε την μεγαλύτερη και την μικρότερη απόσταση των σημείων του κύκλου από την αρχή των αξόνων

## *ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ*

### *ΘΕΜΑ Ι*

Α)Να αποδειχτεί ότι το πολυώνυμο p(x)=$27x^3+26x^2+9x-2$ δεν έχει παράγοντα της μορφής χ-$\sqrt{r}$ όπου r θετικός ακέραιος και δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

Β)Να λυθεί η εξίσωση $2\chi^4-3x^3-13x^2+3x+2=0$.

Γ)Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x^2+3}=x+\lambda$.

### *ΘΕΜΑ ΙΙ*

Α)Αν το πολυώνυμο p(x)=$ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ έχει παράγοντα το $(\chi\text{-}1)^2$ τότε το πολυώνυμο Q(x)=$4ax^3+3bx^2+2cx+d$ έχει παράγοντα το χ-1.

Β)ι) Αν το χ-1 είναι παράγοντας του p(x)=$\alpha\chi^3+3x^2+x+\beta$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης p(x):(x+2) είναι 21, να βρεθούν τα α και β.

ιι) Να υπολογίσετε τα α, β για τα οποία το q(x)=$x^{2000}+\alpha\chi+\beta$ παράγοντα το $(\chi\text{-}1)^2$.

### *ΘΕΜΑ ΙΙΙ*

Α)Δίνετε η εξίσωση $\alpha\chi^4+x^3-(a^3+1)x^2-a^2x+4=0$ (Ι)

Ι)Αν χ=-1 ρίζα της (Ι) να βρείτε το α.

ΙΙ)Για τις τιμές του α που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση (Ι).

Β)Να λυθεί η εξίσωση ι) $\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})^2}+\sqrt[3]{(\frac{x-1}{x+1})^2}+\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})}+\sqrt[3]{(\frac{x-1}{x+1})}=0$

ιι)Να λυθεί η εξίσωση $\chi^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$.

### ΘΕΜΑ IV

Α)Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε τον βαθμό του πολυωνύμου φ(χ)=$(\lambda^2-3\lambda+2)\chi^4+(\lambda-1)\chi^3-(\lambda-2)\chi^2+\chi-\lambda^3$.

Β)Έστω πολυώνυμο φ(χ) με βαθμό ν≥2 και α, β εR ,α≠β . Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης φ(χ):(χ-α).(χ-β) είναι το

υ(χ)=$\frac{\phi(\alpha)-\phi(\beta)}{\alpha-\beta}\chi+\frac{\alpha\phi(\beta)-\beta\phi(\alpha)}{\alpha-\beta}$

# ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

## ΖΗΤΗΜΑ Ι

Α)Να αποδείξετε ότι :

ι)Αν α, β, γ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^0$ τότε $α^3>β^3+γ^3$ και $α^ν>β^ν+γ^ν$

ιι)$10^ν \geq (1+ν).(1+4ν)$.

Β:Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $(α^3-α)/3$ είναι ακέραιος.

Γ¨: Να δείξτε ότι ο αριθμός 7 διαιρεί τον $2^{ν+2}+3^{2ν+1}$ για κάθε $ν \in N^*$

## ΖΗΤΗΜΑ ΙΙ

Α: ι)Να βρεθούν οι διψήφιοι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν πηλίκο ίσο με το τετράγωνο του υπολοίπου.

ii)Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $7^{10}$ με το 51

Β: ι)Να οι τιμές του φυσικού ν για τις οποίες το κλάσμα

$\dfrac{\nu^2-4}{\nu^2+5\nu+6}$ να είναι ακέραιος

ιι)Να βρεθούν οι ακέραιοι χ , ψ για τους οποίους ισχύει $ψ^2-2χψ-3χ-3=0$

## ΖΗΤΗΜΑ ΙΙΙ

Α: Αν α, β εZ , να αποδειχτεί ότι (α, β+λα)=(α+κβ, (α+(κ+1)β) για κάθε κ,λεZ.

Β: Δίνεται ο περιττός νεΝ.

i)Να αποδείξετε ότι $(ν^2+ν,ν+2)=1$

ιι)Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των αριθμών ν, ν+1, ν+2

Γ:Να προσδιοριστούν οι φυσικοί αριθμοί α, β μα α.β=240 και [α,β]=60

## ΖΗΤΗΜΑ IV

Α: i) Το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής 8λ+1, λεZ

ιι) Αν α,βεZ και $α.β=1999^{2001}$, να αποδειχτεί ότι ο αριθμός Α=$\dfrac{a^4+\beta^4-2}{16}$ είναι ακέραιος.

Β:Ρώτησαν ένα κτηνοτρόφο για το πόσα ζώα έχει και αυτός απάντησε ως εξής:

Τα ζώα που έχω είναι περισσότερα από 250 και λιγότερα από 300.
Όταν τα μετράω ανά 12 , περισσεύουν 9, και όταν τα μετράω ανά 16, περισσεύουν 5.

Να βρείτε τον ακριβή αριθμό των ζώων που έχει ο κτηνοτρόφος.

***ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ***
***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ***

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΕΚΘΕΤΙΚΗ -ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

## *ΖΗΤΗΜΑ Ι*

Α. Με α>ο,α≠1 καιθ>0 ,κεR δείξτε ότι $Log_{\alpha}\theta^{\kappa}=\kappa Log_{\alpha}\theta$

Β. Να βρείτε τις τιμές του β ώστε η g με $g(x)=\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)^{\chi}$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Γ. Να συγκριθούν οι m ,ν αν ισχύει:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{m}$ β) $\left(\sqrt{3}\right)^{m} \leq \left(\sqrt{3}\right)^{\nu}$ γ) $(0,7)^{\nu} \geq (0,7)^{m}$

## ΖΗΤΗΜΑ ΙΙ

Α. Να λυθεί η εξίσωση $8^{x} - 4^{x+1} - 2^{x} + 4 = 0$

Β. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^{x+\psi} = \psi^{\chi-\psi} \\ \chi^{2}.\psi = 1 \end{cases}$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση

$\mathrm{Log}(\left(3^{x} + 5^{x}\right) + Log3 + 2Log2 = xLog5 + Log102$

## ΖΗΤΗΜΑ ΙΙΙ

Α. Να λυθεί η ανίσωση $\log_{b^2}(x^2 - 6) \leq \log_{b^2}(5x)$

Β. Ομοίως την $\log_x(\log_4(2^x-2))<1$

Γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f με f(x)=log(10x)

## ΖΗΤΗΜΑ ΙV

Αι).Βρείτε τις τιμές των χ,ψ,ωεR έτσι ώστε να ισχύει:

$(\log x)^{2} + x^{2} + (\log\psi)^{2}+\psi^{2}=2\chi\psi-2\log x.\log\psi+\eta\mu\omega-1$

ιι)Να λυθεί το σύστημα. $\begin{cases} x + \psi = 20 \\ 5^{\log x} + x^{\log 5} = 10 \end{cases}$

Β. Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι :

ι) δύο ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης του ο αριθμός των βακτηριδίων είναι 400.

ιι) 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια είναι 3200. Αν ο τύπος που δίνει των αριθμό των βακτηριδίων είναι $P(t)=P_O.2^{\kappa t}$, όπου P(t) ο αριθμός των βακτηριδίων, $P_0$ ο αρχικός αριθμός και κ σταθερά που εξαρτάτε από το είδος των βακτηριδίων τότε :

Α)Να βρείτε το κ .

Β) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

Γ)Σε πόσα λεπτά ο αρχικός πληθυσμός των βακτηριδίων θα διπλασιαστεί ;

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΓΕΝΙΚΟ)
## ΘΕΜΑ I

Α.ι) Τι καλείται ακολουθία, τη αριθμητική πρόοδο και τη γεωμετρική ; Να βρείτε τον ν-οστό όρο της ακολουθίας με $\alpha_1=2$ και $\alpha_{\nu-1}=\alpha_{\nu-2}+3$ με $\nu>2$ και $\nu\varepsilon IN$

ii)Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του χ ,ποιος είναι ο βαθμός του;

Έστω το αθροίσμα $S_n=\alpha_1+\alpha_1\lambda+...+\alpha_1\lambda^{n-1}$ με $a_1\in IR, \lambda\neq 1$, εκφράζει αυτό πολυώνυμο;

Β. Δίνεται η $\alpha\chi^4+\chi^3-(\alpha^3+1)\chi^2-\alpha^2\chi+4=0$ (ι)

Α)Αν χ=-1 είναι ρίζα της (ι) να βρείτε το α

Β)Για τις τιμές του α που βρήκατε να **λύσετε** την (ι)

## ΘΕΜΑ II

**a.**Να λυθεί η εξίσωση $100^x$-log$100^3.10^x+8=0$

Έστω $\rho_1$, $\rho_2$ με $\rho_1<\rho_2$, οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Θεωρούμε τη Γ.Π με $\alpha_1=\rho_1$ και $\alpha_2=\rho_2$.

Α)Να βρεθεί ο λογος λ της προόδου

Β)Να υπολογιστεί το άθροισμα $\Sigma=\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2002}$.

b. Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{A}+\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{B}+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}.\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}.\sigma\upsilon\nu\Gamma=1$

Αν σε τρίγωνο ΚΛΜ ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{K}+\sigma\upsilon\nu^2\Lambda+\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{M}=1$ δείξτε ότι το ΚΛΜ είναι ορθογώνιο.

## ΘΕΜΑ III

**Α.**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\ln x)^3+2(\ln x)^2+a\ln x+b, x>0, a,b\in\Re$

α)Αν f(1/e)=0 και f(e)=0 να αποδείξετε ότι α=-1 και b=-2

β)Για τις τιμές α=-1, b=-2 να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 και την ανίσωση f(x)>0

γΝα βρείτε πολυώνυμα f και g για τα οποία να ισχύει:

$$\frac{x^4+1}{x^2+1}=f(x)+\frac{g(x)}{x^2+1}$$

Β. ι) Αν το πολυώνυμο $\rho(\chi)=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\kappa$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\kappa\in IR$ έχει παράγοντα το$(\chi-\rho)^2$,να δείξτε ότι το $Q(x)=4\alpha\chi^3+3\beta\chi^2+2\gamma\chi+\delta$ έχει παράγοντα το χ-ρ.

ii)Να βρείτε το άθροισμα όλων των φυσικών χ με 100<χ<401 και είναι πολλαπλάσια του 6

## ΘΕΜΑ IV

Α.ι) Αν συν(α-β)=συνα.συνβ+ημα.ημβ δείξτε ότι ημ(α+β)=ημα.συνβ+ημβ.συνα

ii)Να δείξτε ότι $\sqrt{4\eta\mu^4\alpha+\eta\mu^2 2\alpha}+4\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})=2$ με $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Β.Από ένα πλακόστρωτο διάδρομο σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου, τον οποίο θέλουμε να αναμορφώσουμε αλλάζουμε τις πλάκες, από όλες τις σειρές εκτός από την πρώτη που έχει 5 και την τελευταία που έχει 50 πλάκες.

Παρεμβάλουμε λοιπόν ένα νέο αριθμό σειρών μεταξύ της πρώτης και της τελευταίας σειράς, ώστε ο αριθμός των πλακών της τελευταίας, από τις νέες σειρές, να είναι τριπλάσιος από της δεύτερης από αυτές. Ο αριθμός των πλακών διαφέρει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο αριθμό ω, $\omega \in \mathbb{N}$.

i)Πόσες νέες σειρές από πλάκες θα τοποθετηθούν;

ii)Πόσες συνολικά πλάκες θα έχει ο διάδρομος;

iii)Να βρείτε την τιμή του ω.

*ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ*
*ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ*

## *ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ*

Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) η λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. $3^2+3^4=3^6$
2. $a^0=1, a\neq 0$
3. $0^0=1$
4. $\frac{0}{0}=1$
5. $\infty-\infty=0$
6. Η εξίσωση (λ-1)χ=$\lambda^2$-λ έχει μοναδική λύση στο $\Re$.
7. Η εξίσωση (χ-1).(3χ+5)=0 είναι τριώνυμο με Δ>0.
8. Η εξίσωση $|x+1|+|x+2|=0$ είναι αδύνατη.
9. $\sqrt[r]{a^n}=a^{\frac{n}{r}}, \mu\varepsilon n, r\in N$ και α>0.
10. Η ανίσωση $\chi^2$-5χ+6>0 έχει λύσεις χ>2 και χ<3.
11. Το τριώνυμο α$\chi^2$+βχ+γ,α≠0 και Δ>0 είναι ομόσημο του α εκτός του διαστήματος των ριζών, ενώ αν Δ<0 διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$.
12. $16^{15}$-1 είναι πολλαπλάσιο του 5.
13. Έστω ένα 2χ2 γραμμικό σύστημα (Σ) με D=2 και $D_X$=3 και $D_Y$=4 τότε η λύση του συστήματος είναι χ=1,5 και y=2.
14. Έστω το τριώνυμο f(x)=$\chi^2$-6χ+8, τα σημεία που τέμνει τον άξονα των χ, είναι οι λύσεις τις εξίσωσης $\chi^2$-6χ+8=0.
15. Το τριώνυμο φ(χ)= -$\chi^2$+5χ-6 παίρνει μέγιστη τιμή στο χ=2,5.
16. Η απόσταση των σημείων (2,3) και (6,6) είναι 5.
17. Οι ευθείες ψ=3χ+4 και 3ψ+χ=0 τέμνονται κάθετα.
18. Αν α,β είναι ομόσημοι μη μηδενικοί τότε $\sqrt{\frac{a}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$
19. Ομοίως $\sqrt{a\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ για α,β ομόσημοι.
20. Αν $|\chi-1|=-2$ τότε χ=3.
21. Αν $|\chi-1|\leq 0$ τότε χ=1.
22. Αν$|\chi-1|\geq 2$ τότε χ≥3 η χ≤-1.
23. Αν $|\chi|$<3 τότε -3 <χ<3
24. Αν $\chi^2$=4⇒ |χ|=2.
25. Αν χ=2 ⇔ $x^2=4$
26. Αν φ(χ)=$\chi^2$ τότε φ(2ψ)=4φ(ψ)
27. Σε ένα πάρτι οι καλεσμένοι τσουγκρίζουν τα ποτήρια τους και ακούγονται 55 κρότοι , πόσοι είναι οι καλεσμένοι;

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ Ι

Α. i)Να δείξετε ότι ημ(α+β). ημ(α-β)=ημ$^2$α-ημ$^2$β

ii)Αν ΑΒΓ τρίγωνο και ισχύει ημ$^2$Α=ημ$^2$Β+ημ$^2$Γ να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Β. Αν οι γωνίες α,β,γ ικανοποιούν την ισότητα α+β+γ=π, να δείξετε .ότι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu\beta.\sigma\upsilon\nu\gamma = 1$

**ΘΕΜΑ ΙΙ**

Α. i) Να γίνει η γραφική παράσταση της f(x)=2ημ$\frac{x}{2}$, σε πλάτος μιας περιόδου

Να βρείτε ακόμα τις γραφικές παραστάσεις των $|f(x)|$, -f(x) στο ίδιο διάστημα

ii).Να λυθεί η εξίσωση ημχ+$\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 1$

Β. i) Εάν μεταξύ των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει εφΒ=$\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma - \mathrm{B})}{\eta\mu\mathrm{A} + \eta\mu(\Gamma - \mathrm{B})}$, να δειχτεί ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ii) Να βρείτε το γινόνενο $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{15}$

**ΘΕΜΑ ΙΙΙ**

Α.i) Αν α+β+γ=90$^0$, να δείξετε ότι εφα. εφβ+εφβ.εφγ+εφγ.εφα=1

ii) Να δείξετε ότι $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha} = \sigma\phi 2\alpha$

Β. i) Αν σε τρίγωνο ισχύει ημΑ.συνΒ+ημΒσυνΑ=1 το τρίγωνο είναι:

Α) οξυγώνιο Β )αμβλυγώνιο Γ) ορθογώνιο Δ) τίποτα από αυτά

ii) Η παράσταση συν860$^0$.συν110$^0$-.ημ860$^0$.ημ110$^0$ είναι ίση με :

Α) συν970$^0$ Β) 1/2 Γ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ) ημ970$^0$ Ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

iii) Αν $\frac{2\pi}{3} \le \alpha \le \pi$ και ισχύει χ=2ημα συνα είναι:

Α) χ=1/4 Β)χ=1 Γ ) χ=0 Δ)χ$\ge$ 0 Ε)χ$\le$ 0 ΣΤ) τίποτα από αυτά.

**ΘΕΜΑ ΙV**

Τρείς κοινότητες Α, Β και Γ συνδέονται με ευθύγραμμους δρόμους οι οποίοι σχηματίζουν οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Ο δρόμος ΒΓ έχει μήκος α Km. Για να μετρήσουμε την απόσταση ΑΔ=χ της κοινότητας Α από το δρόμο ΒΓ, μετρούμε τις γωνίες ω=$B\hat{A}\Delta, \kappa\alpha\iota \phi = \Gamma\hat{A}\Delta$.

Α)Να εκφράσετε τις αποστάσεις ΒΔ, ΓΔ συναρτήσει των χ,ω και φ.

Β)Αν α=4, να εκφράσετε την απόσταση ΑΔ συναρτήσει των ω και φ.

Γ)Αν ω=30$^0$, φ=15$^0$ και α=4,να υπολογίσετε την απόσταση ΑΔ

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

### *ΘΕΜΑ Ι*

Α)Να αποδειχτεί ότι το πολυώνυμο p(x)=$27x^3+26x^2+9x-2$ δεν έχει παράγοντα της μορφής χ-$\sqrt{r}$ όπου r θετικός ακέραιος και δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

Β)Να λυθεί η εξίσωση $2\chi^4-3x^3-13x^2+3x+2=0$.

### *ΘΕΜΑ ΙΙ*

Α)Αν το πολυώνυμο p(x)=$ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ έχει παράγοντα το $(\chi\text{-}1)^2$ τότε το πολυώνυμο Q(x)=$4ax^3+3bx^2+2cx+d$ έχει παράγοντα το χ-1.

Β)ι) Αν το χ-1 είναι παράγοντας του p(x)=$\alpha\chi^3+3x^2+x+\beta$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης p(x):(x+2) είναι 21, να βρεθούν τα α και β.

ιι) Να υπολογίσετε τα α, β για τα οποία το q(x)=$x^{2000}+\alpha\chi+\beta$ παράγοντα το $(\chi\text{-}1)^2$.

### *ΘΕΜΑ ΙΙΙ*

Α)Δίνετε η εξίσωση $\alpha\chi^4+x^3-(a^3+1)x^2-a^2x+4=0$ (Ι)

ι)Αν χ=-1 ρίζα της (Ι) να βρείτε το α.

ιι)Για τις τιμές του α που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση (Ι ).

Β. ι)Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε τον βαθμό του πολυωνύμου φ(χ)=$(\lambda^2-3\lambda+2)\chi^4+(\lambda-1)\chi^3-(\lambda-2)\chi^2+\chi-\lambda^3$.

ιι)Έστω πολυώνυμο φ(χ) με βαθμό ν≥2 και α, β εR ,α≠β . Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης φ(χ):(χ-α).(χ-β) είναι το

$$\upsilon(\chi)=\frac{\phi(\alpha)-\phi(\beta)}{\alpha-\beta}\chi+\frac{\alpha\phi(\beta)-\beta\phi(\alpha)}{\alpha-\beta}$$

### *ΘΕΜΑIV*

Ένα κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει βάση τετράγωνο πλευράς α μέτρα και το ύψος μικρότερο κατά ένα μέτρο από την βάση.

Α. Να υπολογίσετε τον όγκο του κιβωτίου ως συνάρτηση του α

Β.Για ποια τιμή του α το κιβώτιο χωράει 18lit.

Γ Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επειφάνειας του κιβωτίου ως συνάρτηση του α

Δ.Να βρείτε την μέγιστη τιμή του α ώστε για την κατασκευή του κιβωτίου να απαιτούνται το πολύ 16 $m^2$ λαμαρίνας.

***ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3h***
***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***
***ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ***
***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ***

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

## ΘΕΜΑ Ι

Α)Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του $\chi$,ποιος είναι ο βαθμός του;
Έστω το αθροίσμα $S_n=\alpha_1+\alpha_1\lambda+...+\alpha_1\lambda^{n-1}$ με $a_1 \in IR, \lambda \neq 1$, n∈ N. Για ποια τιμή του n εκφράζει αυτό πολυώνυμο;
Β. Δίνεται η $\alpha\chi^4+\chi^3-(\alpha^3+1)\chi^2-\alpha^2\chi+4=0$ (ι)
Α)Αν χ=-1 είναι ρίζα της (ι) να βρείτε το α
Β)Για τις τιμές του α που βρήκατε να λύσετε την (ι)

## ΘΕΜΑ ΙΙ

Αι)Να βρείτε πολυώνυμα f και g για τα οποία να ισχύει:
$$\frac{x^4+1}{x^2+1}=f(x)+\frac{g(x)}{x^2+1}.$$
Β.Έστω α,β,γ∈R με α+β+γ=0 και το πολυώνυμο $P(\chi)=\alpha\chi^\nu+\beta\chi^\mu+\gamma$.
i)Να αποδείξετε ότι το χ-1 είναι παράγοντας του P
ii)Βρείτε το πηλίκο Π(χ) της διαίρεσης P(χ):(χ-1)
ιιι)Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης Π(χ):(χ-1)

## ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Α. Να λύσετε την εξίσωση $6\chi^4-35\chi^3+62\chi^2-35\chi+6=0$
Βι).Να βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με ρίζα το μηδέν για το οποίο ισχύει φ(χ)-φ(χ-1)=χ, $\forall\chi\in\Re$, κατόπιν να υπολογίσετε το άθροισμα 1+2+3+4+…+2001.
Ιι)Να λυθεί η εξίσωση $6\chi^3+\chi^2-\kappa^7=0$, αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

## ΘΕΜΑ IV

Α)Αν το πολυώνυμο $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ έχει παράγοντα το $(\chi-1)^2$ τότε το πολυώνυμο $Q(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ έχει παράγοντα το χ-1.
ΒΙ). Αν ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x)-x, τότε είναι και ρίζα του P(P(x))-x Σ Λ
ΙΙ)Αν η διαίρεση φ(χ):χ-2) είναι τέλεια τότε χ-4 διαιρεί το ρ(χ)=φ(2χ-6) Σ Λ
ΙΙΙ)Ο βαθμός του πηλίκου της διαίρεσης $\left[x(2x-3)^5-x^3-4x+1\right]:x(x+2)$ είναι:
Α: 2 Β : 3 Γ : 4 Δ:5 Ε : τίποτα από αυτά

*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ*

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΟΔΟΙ

## ΘΕΜΑ Ι

Α. Αν α,β,γ διαδοχικοί όροι σε αριθμητική πρόοδο, να δείξετε ότι και οι $\alpha^2$-βγ, $\beta^2$-αγ, $\gamma^2$-αβ, θα είναι διαδοχικοί σε αριθμητική.
Β. Μεταξύ των ριζών τις εξίσωσης $\chi^2-10\chi+21=0$ να παρεμβάλλεται 6 αριθμούς έτσι ώστε όλοι μαζί συμπεριλαμβανομένου των ριζών να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.
Γ. Να υπολογιστεί το άθροισμα $1+2\chi+3\chi^2+\ldots+\nu\chi^{\nu-1}, \chi\neq 1$

## ΘΕΜΑ ΙΙ

Α Να βρεθούν τα α,β ώστε οι λύσεις $\rho_1, \rho_2$, της $\chi^2-\alpha\chi+\beta=0$ και οι λύσεις $\rho_3,\rho_4$ της $\chi^2-(5\alpha-4)+\beta=0$,να είναι με την σειρά $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$,διαδοχικοί όροι σε αριθμητική.
Β.Να αποδειχτεί ότι το άθροισμα των ν γεωμετρικών ενδιαμέσων που παρεμβάλλονται μεταξύ του 1 και του $\alpha\in\Re_+^*$ είναι $\Sigma=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{\nu+1}}\cdot\left(\alpha^{\frac{\nu}{\nu+1}}-1\right)}{\alpha^{\frac{1}{\nu+1}-1}}$
Γ. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων σε αριθμητική πρόοδο είναι $\Sigma_\nu=3\nu^2+5\nu$, για κάθε ν φυσικό. Να βρεθεί ο πρώτος όρος , η διαφορά της προόδου .

## ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Α. ι) Αν β,α,γ είναι διαδοχικοί όροι γ.π τότε ισχύει

Α) 2γ=α.β, Β) $\alpha^2=\beta+\gamma$, Γ) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ Δ)τίποτα από αυτά.

ii) Αν α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι σε αριθμητική και σε γεωμετρική πρόοδο με την σειρά που δίνονται τότε, είναι σωστο (Σ) ή λάθος (Λ) ότι α=β=γ
iιι) Η $\alpha_\nu=4\nu-12$ είναι α) αριθμητική β)γεωμετρική γ) τίποτα από αυτά.
iv) Οι όροι 2,7,5,10 έχουν 2+10=5+7 είναι α) Α.Π β) Γ.Π γ)τίποτα από αυτά
v) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις δεν είναι ακολουθία
α) $\alpha_\nu$-2ν+4, β) $\beta_\nu=\dfrac{\nu+1}{\nu^\nu}$ , γ) $\gamma_\nu=\sqrt{1-2\nu}$ , δ) $\delta_\nu=\sqrt[3]{\nu^2+\nu^3}$

Β. Να δείξετε ότι $(3.9.27\ldots..3^\nu)^2=3^{\nu^2+\nu}$
Γ Σε γ.π είναι $\alpha_3=12$ και ο $\alpha_6=96$, να βρείτε τον πέμπτο όρο της

## ΘΕΜΑ IV

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε κάθε μια ώρα.
Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος τους ύστερα από 6 ώρες.
Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3$.10 βακτηριδίων την ώρα.

i)Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά των ψεκασμό.
ii) Μετά από πόσες ώρες από την στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

*ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3h*
*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ*
*ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ*
*ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ*

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## ***ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ*** ***ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ -ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ***

### *ΘΕΜΑ Ι*

Α)Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις: i)Η εξίσωση $\frac{x^2}{36-\lambda}+\frac{\psi^2}{9-\lambda}=1$ παριστάνει έλλειψη:

Α) : λ>9 Β) : λ⟨9 Γ) : 9⟨λ⟨36 Δ ) λεR

Β)Αν η εξίσωση $\kappa\chi^2+\lambda\psi^2=1$ με κ>λ>0 παριστάνει έλλειψη, τότε το $\varepsilon^2$ είναι ίσο με:

Α : κ-λ Β: (κ-λ)/λκ Γ: 1-λ/κ Ε : κ λ

Γ)Η εξίσωση $\frac{x^2}{a}-\frac{\psi^2}{\beta}=\gamma$ με γ≠0 παριστάνει υπερβολή όταν:

Α: αβ≠0 Β : αβ>0 Γ : αβ<0 Δ : γ=1 Ε : κανένα από τα προηγούμενα.

Δ) Η παραβολή $\psi^2=(\lambda^2-5\lambda+6)\chi$ έχει όλα τα σημεία της στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο αν

Α: λ=1/2 Β: λεR Γ : λ>0 Δ: λ>1/2 Ε :2<λ<3

Ε)Το σημείο Α(α,β) απέχει από την διευθετούσα της παραβολής $\psi^2=4\rho\chi$

Α : α+ρ Β: /α+ρ/ Γ: α-ρ Δ: α+(ρ/2) Ε: /α-ρ/

### *ΘΕΜΑΙΙ*

Δίνεται η ευθεία (ε) χ+ψ=2 και ο κύκλος (C ) $\chi^2+\psi^2=4$

Α) α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4+\lambda$ (χ+ψ-2)=0 παριστάνει κύκλο για κάθε λεR και ότι αυτός διέρχεται από δυο σταθερά σημεία.
β)Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν σε σταθερή ευθεία .
Β)Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών της παραβολής $\psi^2=2px$, έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ, βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.

### **ΘΕΜΑ ΙΙΙ**

Α)Να βρεθούν οι ακέραιοι χ , ψ για τους οποίους ισχύει $\psi^2$-2χψ-3χ-3=0

Β): Αν α, β εΖ , να αποδειχτεί ότι (α, β+λα)=(α+κβ, (α+(κ+1)β) για κάθε κ,λεΖ.

Β: Δίνεται ο περιττός νεΝ.
i)Να αποδείξετε ότι $(\nu^2+\nu,\nu+2)=1$
ιι)Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των αριθμών ν, ν+1, ν+2
Γ:Να προσδιοριστούν οι φυσικοί αριθμοί α, β μα α.β=240 και [α,β]=60

### **ΘΕΜΑ IV**

Α: i) Το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής 8λ+1, λεΖ
ιι) Αν α,βεΖ και $\alpha.\beta=1999^{2001}$, να αποδειχτεί ότι ο αριθμός Α=$\frac{a^4+\beta^4-2}{16}$ είναι ακέραιος.

Β)Να βρείτε σημείο Μ της έλλειψης C : $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$, τέτοιο ώστε η γωνία Ε΄ΜΕ να είναι 90 μοίρες.

Γ)Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή C : $X^2 - Y^2 = \alpha^2$ και η ευθεία (ε ) y=k , που τέμνει την υπερβολή στα σημεία Β΄ , Β . Αν Α΄ , Α είναι οι κορυφές της υπερβολής, να αποδείξετε ότι οι γωνίες ΒΑ΄Β΄ , ΒΑΒ΄ είναι 90 μοίρες.

*ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3h*
*ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ*
*ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ*

**ΤΕΣΤ**

ΟΝΟΜΑ…………………………………..
ΕΠΙΘΕΤΟ………………………………….

Α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \sigma\phi\frac{\theta}{2}$

ΛΥΣΗ

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Β. Να λυθεί η εξίσωση 3.ημχ-3συνχ=3

ΛΥΣΗ

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Γ .Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τους π/12

ΛΥΣΗ

…………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

## ΘΕΜΑ Ι

Α)Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του $\chi$,ποιος είναι ο βαθμός του;
Έστω το αθροίσμα $S_n=\alpha_1+\alpha_1\lambda+...+\alpha_1\lambda^{n-1}$ με $a_1\in IR,\lambda\neq 1$, $n\in N$. Για ποια τιμή του n εκφράζει αυτό πολυώνυμο;
Β. Δίνεται η $\alpha\chi^4+\chi^3-(\alpha^3+1)\chi^2-\alpha^2\chi+4=0$ (ι)
Α)Αν $\chi$=-1 είναι ρίζα της (ι) να βρείτε το α
Β)Για τις τιμές του α που βρήκατε να λύσετε την (ι)

## ΘΕΜΑ ΙΙ

Αι) Να λύσετε την εξίσωση $6\chi^4-35\chi^3+62\chi^2-35\chi+6=0$
ιι)Να λυθεί η εξίσωση $6\chi^3+\chi^2-\kappa^7=0$, αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

## ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Α)Αν το πολυώνυμο $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ έχει παράγοντα το $(\chi-1)^2$ τότε το πολυώνυμο $Q(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ έχει παράγοντα το $\chi$-1.
ΒΙ). Αν ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x)-x, τότε είναι και ρίζα του P(P(x))-x Σ Λ
ΙΙ)Αν η διαίρεση $\varphi(\chi)$:$\chi$-2) είναι τέλεια τότε $\chi$-4 διαιρεί το $\rho(\chi)=\varphi(2\chi-6)$ Σ Λ
ΙΙΙ)Ο βαθμός του πηλίκου της διαίρεσης $\left[x(2x-3)^5-x^3-4x+1\right]:x(x+2)$ είναι:
Α: 2 Β : 3 Γ : 4 Δ:5 Ε : τίποτα από αυτά

## ΘΕΜΑIV

Ένα κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει βάση τετράγωνο πλευράς α μέτρα και το ύψος μικρότερο κατά ένα μέτρο από την βάση.
Α. Να υπολογίσετε τον όγκο του κιβωτίου ως συνάρτηση του α
Β.Για ποια τιμή του α το κιβώτιο χωράει 18lit.
Γ Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επειφάνειας του κιβωτίου ως συνάρτηση του α
Δ.Να βρείτε την μέγιστη τιμή του α ώστε για την κατασκευή του κιβωτίου να απαιτούνται το πυλύ 16 $m^2$ λαμαρίνας.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2h
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΟΔΟΙ

## ΘΕΜΑ Ι

Α. Αν $\alpha,\beta,\gamma$ διαδοχικοί όροι σε αριθμητική πρόοδο, να δείξετε ότι και οι $\alpha^2-\beta\gamma$, $\beta^2-\alpha\gamma$, $\gamma^2-\alpha\beta$, θα είναι διαδοχικοί σε αριθμητική.

Β. Μεταξύ των ριζών τις εξίσωσης $\chi^2-10\chi+21=0$ να παρεμβάλλεται 6 αριθμούς έτσι ώστε όλοι μαζί συμπεριλαμβανομένου των ριζών να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Γ. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων σε αριθμητική πρόοδο είναι $\Sigma_\nu=3\nu^2+5\nu$, για κάθε ν φυσικό. Να βρεθεί ο πρώτος όρος , η διαφορά της προόδου .

## ΘΕΜΑ ΙΙ

Α. ι) Αν $\beta,\alpha,\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι γ.π τότε ισχύει

Α) $2\gamma=\alpha.\beta$, Β) $\alpha^2=\beta+\gamma$, Γ) $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ Δ)τίποτα από αυτά.

ii) Αν $\alpha,\beta,\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι σε αριθμητική και σε γεωμετρική πρόοδο με την σειρά που δίνονται τότε, είναι σωστο (Σ) ή λάθος (Λ) ότι $\alpha=\beta=\gamma$

ιιι) Η $\alpha_\nu=4\nu-12$ είναι α) αριθμητική β)γεωμετρική γ) τίποτα από αυτά.

iv) Οι όροι 2,7,5,10 έχουν 2+10=5+7 είναι α) Α.Π β) Γ.Π γ)τίποτα από αυτά

v) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις δεν είναι ακολουθία

α) $\alpha_\nu$-2ν+4, β) $\beta_\nu=\frac{\nu+1}{\nu^\nu}$ , γ) $\gamma_\nu=\sqrt{1-2\nu}$ , δ) $\delta_\nu=\sqrt[3]{\nu^2+\nu^3}$

## ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Α. Να δείξετε ότι $(3.9.27.....3^\nu)^2=3^{\nu^2+\nu}$

Β Σε γ.π είναι $\alpha_3=12$ και ο $\alpha_6=96$, να βρείτε τον πέμπτο όρο της

Γ. Να βρείτε γεωμετρική πρόοδος για την οποία ο τέταρτος όρος της είναι 24 και το άθροισμα των τριών πρώτων είναι 21

## ΘΕΜΑ IV

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε κάθε μια ώρα.

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος τους ύστερα από 6 ώρες.

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3.10$ βακτηριδίων την ώρα.

i)Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά των ψεκασμό.

ii) Μετά από πόσες ώρες από την στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# **ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ**

## ΖΗΤΗΜΑ Ι

Α)Να γράψετε την ανισότητα του Bernoulli και να αποδείξετε ότι ι)$10^{\nu} \geq (1+\nu).(1+4\nu)$.

Β:Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός ( $\alpha^3$-α)/3 είναι ακέραιος.

Γ¨: Να δείξτε ότι ο αριθμός 7 διαιρεί τον $2^{\nu+2}+3^{2\nu+1}$ για κάθε $\nu \in N^*$

## ΖΗΤΗΜΑ ΙΙ

Α: ι)Να βρεθούν οι διψήφιοι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν πηλίκο ίσο με το τετράγωνο του υπολοίπου.

Β: ι)Να οι τιμές του φυσικού ν για τις οποίες το κλάσμα $\dfrac{\nu^2-4}{\nu^2+5\nu+6}$ να είναι ακέραιος

ιι)Να βρεθούν οι ακέραιοι χ , ψ για τους οποίους ισχύει $\psi^2-2\chi\psi-3\chi-3=0$

## ΖΗΤΗΜΑ iii

Α: i) Το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής 8λ+1, $\lambda \in Z$

ii) Αν $\alpha,\beta \in Z$ και $\alpha.\beta=1999^{2001}$, να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A=\dfrac{a^4+\beta^4-2}{16}$ είναι ακέραιος.

iii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι α,β ώστε να ισχύει $\alpha^2-\beta^2=2006$

## ΖΗΤΗΜΑ IV

Α)Να αποδείξετε ότι :

ι)Αν α, β, γ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^0$ τότε $\alpha^3>\beta^3+\gamma^3$ και $\alpha^{\nu}>\beta^{\nu}+\gamma^{\nu}$

Β.Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί α,β,γ,δ με α<4, β<6, γ<5, οι οποίοι ικανοποιούν την σχέση α+4β+24γ+120δ=782

Γ.Αν ο θετικός ακέραιος δ διαιρεί τους $3\nu^3-2\nu$, ν+1 με ν φυσικό ,να βρεθεί ο δ

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

**ΘΕΜΑ 1**

Υπάρχει γωνία ω με ημω=1 και συνω=-1 ;

Να βρείτε το κ , όταν υπάρχει ω με ημω=$κ^2$-2κ+2 , ακόμα να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

**ΘΕΜΑ ΙΙ**

1.Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 27π/4

2.Να αποδείξετε ότι $συν^2\frac{Α}{2}+συν^2\frac{Β+Γ}{2}=1$ σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ

**ΘΕΜΑ ΙΙΙ**

Ι)Να αποδείξετε ότι

Α) $συν^4α-ημ^4α=1-2ημ^2α$

Β) ι) $\dfrac{εφ(π-θ).σφ(103π+θ).εφ(-θ).εφ(\frac{21π}{2}-θ)}{εφ(π+θ).σφ(π-θ).σφθ.εφ(2π-θ)}=1$

**ΘΕΜΑ ΙV**

Α.Μια επικεντρη γωνία ω=2rad βαίνει σε τόξο 8 cm .Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου

Β.Αν 15π/2<3χ<9π να αποδείξετε ότι ημχ-συνχ>εφχ+σφχ

Γ.Σε κύκλο ακτίνας ρ=3cm μια εγγεγραμμένη γωνία ω βαίνει σε τόξο 6 cm Να βρεθεί σε ακτίνια η γωνία ω και σε ποιο τεταρτομόριο βρίσκεται

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2h**

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

**ΘΕΜΑ 1**

Ι)Να αποδείξετε ότι

Α) συν$^4$α-ημ$^4$α=1-2ημ$^2$α

Β) ι) $$\frac{\varepsilon\phi(\pi-\theta).\sigma\phi(103\pi+\theta).\varepsilon\phi(-\theta).\varepsilon\phi(\frac{21\pi}{2}-\theta)}{\varepsilon\phi(\pi+\theta).\sigma\phi(\pi-\theta).\sigma\phi\theta.\varepsilon\phi(2\pi-\theta)}=1$$

**ΘΕΜΑ ΙΙ**

Να γίνει η γραφική παράσταση της φ με φ(χ)=2.ημ(3χ) σε πλάτος μιας περιόδου

Να λύσετε τις εξισώσεις:

Ι) συν(2χ-π/3)+1=0

ΙΙ) 2ημ$^2$χ+ημχ-1=0

**ΘΕΜΑ ΙΙΙ**

Αν συνω=-1/2 και π/2<ω<π να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

### ΘΕΜΑ Ι

Α)Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του $\chi$ ,ποιος είναι ο βαθμός του;
Έστω το αθροίσμα $S_n=\alpha_1+\alpha_1\lambda+...+\alpha_1\lambda^{n-1}$ με $a_1\in IR,\lambda\neq 1$, n$\in$ N. Για ποια τιμή του n εκφράζει αυτό πολυώνυμο;

Β. Δίνεται η $\alpha\chi^4+\chi^3-(\alpha^3+1)\chi^2-\alpha^2\chi+4=0$ (ι)

Α)Αν χ=-1 είναι ρίζα της (ι) να βρείτε το α

Β)Για τις τιμές του α που βρήκατε να λύσετε την (ι)

### ΘΕΜΑ ΙΙ

ΑΙ). Αν ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x)-x, τότε είναι και ρίζα του P(P(x))-x Σ Λ

ΙΙ)Αν η διαίρεση φ(χ):χ-2) είναι τέλεια τότε χ-4 διαιρεί το ρ(χ)=φ(2χ-6) Σ Λ

ΙΙΙ)Ο βαθμός του πηλίκου της διαίρεσης $\left[x(2x-3)^5-x^3-4x+1\right]:x(x+2)$ είναι:

Α: 2 Β : 3 Γ : 4 Δ:5 Ε : τίποτα από αυτά

Β.Να λυθεί η $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

### ΘΕΜΑ ΙΙΙ

**Α.Να** αποδείξετε ότι ο ρ είναι παράγοντας του p(x) αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα.

**Β.** Αι)Να βρείτε πολυώνυμα f και g για τα οποία να ισχύει:

$$\frac{x^4+1}{x^2+1}=f(x)+\frac{g(x)}{x^2+1}.$$

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

**ΘΕΜΑ Ι**

**Να** βρείτε τη σωστή απάντηση

**Α** i) Αν σε τρίγωνο ισχύει ημΑ.συνΒ+ημΒσυνΑ=1 το τρίγωνο είναι:

Α) οξυγώνιο Β )αμβλυγώνιο Γ) ορθογώνιο Δ) τίποτα από αυτά

ii) Η παράσταση συν$860^0$.συν$110^0$-.ημ$860^0$.ημ$110^0$ είναι ίση με :

Α) συν$970^0$ Β) 1/2 Γ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ) ημ$970^0$ Ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

iii) Αν $\frac{2\pi}{3} \le \alpha \le \pi$ και ισχύει χ=2ημα συνα είναι:

Α) χ=1/4 Β)χ=1 Γ ) χ=0 Δ)χ$\ge 0$ Ε)χ$\le 0$ ΣΤ) τίποτα από αυτά.

**Β.** i)Να δείξετε ότι ημ(α+β). ημ(α-β)=$\eta\mu^2$α-$\eta\mu^2$β

ii)Αν ΑΒΓ τρίγωνο και ισχύει $\eta\mu^2$Α=$\eta\mu^2$Β+$\eta\mu^2$Γ να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

**Γ**. Αν οι γωνίες α,β,γ ικανοποιούν την ισότητα α+β+γ=π, να δείξετε .ότι
$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu\beta.\sigma\upsilon\nu\gamma = 1$

**ΘΕΜΑ ΙΙ**

Α. i) Να γίνει η γραφική παράσταση της f(x)=2ημ$\frac{x}{2}$, σε πλάτος μιας περιόδου. Να βρείτε ακόμα τις γραφικές παραστάσεις των $|f(x)|$, -f(x) στο ίδιο διάστημα

Β. i) Εάν μεταξύ των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει
εφΒ=$\frac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma-\mathrm{B})}{\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu(\Gamma-\mathrm{B})}$, να δειχτεί ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

**ΘΕΜΑ ΙΙΙ**

**Να** βρείτε τη σωστή απάντηση

**Α** i) Αν σε τρίγωνο ισχύει ημΑ.συνΒ+ημΒσυνΑ=1 το τρίγωνο είναι:

Α) οξυγώνιο Β )αμβλυγώνιο Γ) ορθογώνιο Δ) τίποτα από αυτά

ii) Η παράσταση συν$860^0$.συν$110^0$-.ημ$860^0$.ημ$110^0$ είναι ίση με :

Α) συν$970^0$ Β) 1/2 Γ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ) ημ$970^0$ Ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

iii) Αν $\frac{2\pi}{3} \le \alpha \le \pi$ και ισχύει χ=2ημα συνα είναι:

Α) χ=1/4 Β)χ=1 Γ ) χ=0 Δ)χ$\ge 0$ Ε)χ$\le 0$ ΣΤ) τίποτα από αυτά.

**Β.** i)Να δείξετε ότι ημ(α+β). ημ(α-β)=$\eta\mu^2$α-$\eta\mu^2$β

ii)Αν ΑΒΓ τρίγωνο και ισχύει $\eta\mu^2$Α=$\eta\mu^2$Β+$\eta\mu^2$Γ να δείξετε ότι το

**ΘΕΜΑ ΙV**

Να αποδείξετε ότι

Α) Ι) συν$^4$α-ημ$^4$α=1-2ημ$^2$α

ΙΙ) $$\frac{\varepsilon\phi(\pi-\theta).\sigma\phi(103\pi+\theta).\varepsilon\phi(-\theta).\varepsilon\phi(\frac{21\pi}{2}-\theta)}{\varepsilon\phi(\pi+\theta).\sigma\phi(\pi-\theta).\sigma\phi\theta.\varepsilon\phi(2\pi-\theta)}=1$$

**Β.**Να λυθεί η ανίσωση $$\frac{(x-1).(x^2-9x+20)}{x^2-x+1}>0$$

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΕΚΘΕΤΙΚΗ -ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

**ΖΗΤΗΜΑ I**

Α. Με $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $\theta>0$, $\kappa\in R$ δείξτε ότι $Log_{\alpha}\theta^{\kappa}=\kappa Log_{\alpha}\theta$

Β. Να βρείτε τις τιμές του β ώστε η g με $g(x)=\left(\dfrac{\beta}{\beta+2}\right)^{\chi}$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Γ. Να συγκριθούν οι m ,ν αν ισχύει:

α) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu}\geq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m}$ β) $\left(\sqrt{3}\right)^{m}\leq\left(\sqrt{3}\right)^{\nu}$ γ) $(0{,}7)^{\nu}\geq(0{,}7)^{m}$

**ΖΗΤΗΜΑ II**

Α. Να λυθεί η εξίσωση $8^{x}-4^{x+1}-2^{x}+4=0$

Β. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^{x+\psi}=\psi^{\chi-\psi} \\ \chi^{2}.\psi=1 \end{cases}$

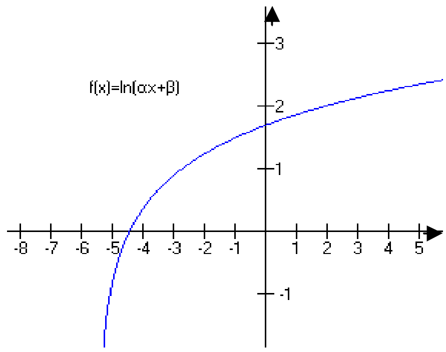
Γ. Να λυθεί η εξίσωση
$Log(\left(3^{x}+5^{x}\right)+Log3+2Log2=xLog5+Log102$

**ΖΗΤΗΜΑ III**

Α. Να λυθεί η ανίσωση $\log_{b^2}(x^2-6)\leq\log_{b^2}(5x)$

Β. Να γίνει η γραφική παράσταση της f με f(x)=log(10x)

**.Γ.** Η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος τέμνει τον ΄χχ στο x=1-2e
Και τον ψ΄ψ στο1+ln2 , να βρείτε την f




**ΖΗΤΗΜΑ IV**

Α.Να λυθεί το σύστημα. $\begin{cases} x+\psi=20 \\ 5^{\log x}+x^{\log 5}=10 \end{cases}$

**Β.Δίνεται** η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a.e^{x}}{\beta x^{2}+1}, \chi\in\Re$, ώστε f(0)=1 και f(1)=e/2

ι).Να βρείτε τα α,β

ιι)Δείξτε ότι $f(x)=e^{x-\ln(x^2+1)}, x\in R$

ιιι)Λύστε την εξίσωση $x-\ln(f(x))=3\ln\left(\sqrt[3]{2}.x\right)$

# ΤΕΣΤ

**ΘΕΜΑ 1**

Υπάρχει γωνία ω με ημω=1 και συνω=-1 ;

Να βρείτε το κ , όταν υπάρχει ω με ημω=$κ^2$-2κ+2 , ακόμα να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

**ΘΕΜΑ ΙΙ**

1.Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 27π/4

2.Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B+\Gamma}{2}=1$ σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ

**ΘΕΜΑ ΙΙΙ**

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\varepsilon\phi(\pi-\theta).\sigma\phi(103\pi+\theta).\varepsilon\phi(-\theta).\varepsilon\phi(\frac{21\pi}{2}-\theta)}{\varepsilon\phi(\pi+\theta).\sigma\phi(\pi-\theta).\sigma\phi\theta.\varepsilon\phi(2\pi-\theta)}=1$$

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

## ΘΕΜΑ Ι

**Α.Να αποδείξετε ότι** $\varepsilon\phi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha.\varepsilon\phi\beta}$

**Να** βρείτε τη σωστή απάντηση

**Β.** i) Αν σε τρίγωνο ισχύει ημΑ.συνΒ+ημΒσυνΑ=1 το τρίγωνο είναι:

Α) οξυγώνιο Β )αμβλυγώνιο Γ) ορθογώνιο Δ) τίποτα από αυτά

ii) Η παράσταση $\sigma\upsilon\nu 860^0.\sigma\upsilon\nu 110^0-\eta\mu 860^0.\eta\mu 110^0$ είναι ίση με :

Α) $\sigma\upsilon\nu 970^0$ Β) 1/2 Γ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Δ) $\eta\mu 970^0$ Ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

iii) Αν $\dfrac{2\pi}{3}\leq\alpha\leq\pi$ και ισχύει χ=2ημα συνα είναι:

Α) χ=1/4 Β)χ=1 Γ ) χ=0 Δ)$\chi\geq 0$ Ε)$\chi\leq 0$ ΣΤ) τίποτα από αυτά.

## ΘΕΜΑ ΙΙ

**Α.** i)Να δείξετε ότι ημ(α+β). $\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$

ii)Αν ΑΒΓ τρίγωνο και ισχύει $\eta\mu^2 A=\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma$ να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

**Β.Να** αποδείξετε ότι

Ι) $\dfrac{\eta\mu 4\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}.\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}.\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\phi\dfrac{\alpha}{2}$

ΙΙ) $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 2\alpha}.\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\sigma\phi\dfrac{\alpha}{2}$

**ΙΙΙ)** $\dfrac{1+\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi}=\varepsilon\phi\dfrac{\chi}{2}$

## ΘΕΜΑ ΙΙΙ

.Α. Αν $\alpha+\beta+\gamma=90^0$, να δείξετε ότι εφα. εφβ+εφβ.εφγ+εφγ.εφα=1

Β. Να λύσετε τις εξισώσεις

ι)συν2χ=1+ημχ

ιι) $\sigma\upsilon\nu 2\chi+2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\chi}{2}=0$

ΙΙΙ) $\sqrt{3}\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=1$

**Γ)**Να γίνει η γραφική παράσταση της f(x)= $2\eta\mu\dfrac{\chi}{2}$ σε πλάτος μιας περιόδου

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

## ΘΕΜΑ 1

1.Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 27π/4

2.Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B+\Gamma}{2}=1$ σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ

3.Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\varepsilon\phi(\pi-\theta).\sigma\phi(103\pi+\theta).\varepsilon\phi(-\theta).\varepsilon\phi(\frac{21\pi}{2}-\theta)}{\varepsilon\phi(\pi+\theta).\sigma\phi(\pi-\theta).\sigma\phi\theta.\varepsilon\phi(2\pi-\theta)}=1$$

## ΘΕΜΑ II

Α.Δίνεται η εξίσωση $\eta\mu^2\chi+\lambda^2.\sigma\upsilon\nu\chi=\lambda+\frac{3}{4}$.Αν μια λύση είναι χ=2π/3 να βρείτε το λ και όλες τις λύσεις της εξίσωσης

Β. Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x)=2\eta\mu\frac{x}{2}$, σε πλάτος μιας περιόδου

Να βρείτε ακόμα τις γραφικές παραστάσεις των $|f(x)|$, -f(x) στο ίδιο διάστημα

## ΘΕΜΑ III

Να λυθούν οι εξισώσεις

2ημχ=1 στο [0,4π]

$\eta\mu^2\chi=\sigma\upsilon\nu^2\chi$

$2\eta\mu^2\chi+5\eta\mu\chi-3=0$

$2\sigma\upsilon\nu(2\chi-\frac{\pi}{5})=1$

$\varepsilon\phi 5\chi.\sigma\phi 10\chi=1$

συνχ=ημ(χ+π/3)

## ΘΕΜΑ iv

Α.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=a.\eta\mu(\frac{2\chi}{3})+\beta,\alpha>0,\beta\in\mathbb{R}$ Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1) και έχει μέγιστη τιμή το 3

Να αποδείξετε ότι α=2 και β=1

Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες

Β.1.Υπάρχει γωνία ω με ημω=1 και συνω=-1 ;

2.Να βρείτε το κ , όταν υπάρχει ω με $\eta\mu\omega=\kappa^2-2\kappa+2$ , ακόμα να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

## *ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ*

### *ΘΕΜΑ Ι*

**Α)** Να αποδείξετε ότι το χ-ρ είναι παράγοντας του πολυωνύμου p(χ) αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα

**Β.**Το πολυώνυμο P (x) διαιρούμενο με x - 2 αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με x + 3 αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P (x) με το (x - 2) (x + 3).

**Γ**)Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x^2+3}=x+\lambda$.

### *ΘΕΜΑ ΙΙ*

Α)Αν το πολυώνυμο p(x)=$ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ έχει παράγοντα το $(\chi-1)^2$ τότε το πολυώνυμο Q(x)=$4ax^3+3bx^2+2cx+d$ έχει παράγοντα το χ-1.
Β)ι) Αν το χ-1 είναι παράγοντας του p(x)=$\alpha\chi^3+3x^2+x+\beta$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης p(x):(x+2) είναι 21, να βρεθούν τα α και β.
ιι) Να υπολογίσετε τα α, β για τα οποία το q(x)=$x^{2000}+\alpha\chi+\beta$ παράγοντα το $(\chi-1)^2$.

### *ΘΕΜΑ ΙΙΙ*

Δίνετε η εξίσωση $\alpha\chi^4+x^3-(a^3+1)x^2-a^2x+4=0$ (Ι)
Ι)Αν χ=-1 ρίζα της (Ι) να βρείτε το α.
ΙΙ)Για τις τιμές του α που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση (Ι ).
ιι)Να λυθεί η εξίσωση $\chi^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$.

### **ΘΕΜΑ IV**

Α)Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε τον βαθμό του πολυωνύμου φ(χ)=$(\lambda^2-3\lambda+2)\chi^4+(\lambda-1)\chi^3-(\lambda-2)\chi^2+\chi-\lambda^3$.
Β.
.Θεωρούμε το πολυώνυμο P(χ)=$\chi^3+2\chi^2-(\alpha+1)\chi+\beta-3$ με α, β πραγματικοί
ι)Να προσδιορίσετε:
α)Τα α και β ώστε το P(χ) να έχει παράγοντα το $(\chi+2)^2$
β)Το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το $(\chi+2)^2$
ιι)Αν $\pi_1(\chi)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το χ+2 και $\pi_2(\chi)$ το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το $(\chi+2)^2$, να λύσετε την εξίσωση

$$(\pi_1(\chi))^2+8\pi_2(\chi)=0$$

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΑΛΓΕΒΡΑ

## ΘΕΜΑ Α

**Α.** Έστω $f: \mathrm{A} \to R$. Να δώσετε τους ορισμούς:

**i)** Η $f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}$.

**ii)** Η $f$ άρτια στο $\mathrm{A}$.

**Β.** Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι Σωστοί (Σ) και ποιοι λανθασμένοι (Λ).

**i)** Αν $f(x) \le M$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$, τότε η $f$ έχει μέγιστη τιμή το $M$.

**ii)** Αν $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$, τότε η $f \nearrow$.

**iii)** Αν $f$ η περιττή στο $\mathrm{A}$ και $0 \in \mathrm{A}$, τότε $f(0) = 0$.

**iv)** Αν $f(1) = 0$ και $f$ γνησίως φθίνουσα τότε για $x > 1 \Rightarrow f(x) > 0$.

**v)** Αν $f: \mathrm{A} \to R$, τότε η $C_f$ μπορεί να τέμνει τον $y'y$ σε δύο σημεία.

**vi)** Αν $f \nearrow \Delta_1$ και $f \nearrow \Delta_2$, τότε $f \nearrow \Delta_1 \cup \Delta_2$.

**vii)** Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ για $x > 0$ έχει ελάχιστη τιμή το $0$.

## ΘΕΜΑ Β

**Α.** Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases}$$

και να το ερμηνεύσετε γραφικά.

**Β.** Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Α.** Να γίνει η γραφική παράσταση της

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<1,\ x\neq 0 \\ x^2, & x\geq 1 \end{cases}$$

**Β.** Δίνεται η $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{5-x}}$ .

**i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**ii)** Να αποδείξετε ότι η $f$ γνησίως αύξουσα.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Α.** Έστω $f:R\to R$ γνησίως μονότονη με $f(1)=3$, $f(3)=1$ και $f(5)=-7$. Να λυθεί η ανίσωση $f(|x-3|-2)\leq -7$ .

**Β.** Έστω $f(x)=x+\frac{1}{x},\ x\neq 0$ .

**i)** Να δείξετε ότι η $f$ περιττή.

**ii)** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f$ ,x>0