ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ-ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-BOLZANO

ΘΕΜΑ Ι

A. Να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

B. Να δώσετε τους ορισμούς

i) Η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0

ii) Η f είναι ''1-1'' στο Α

iii) Η f συνεχής στο x_0

C. Να απαντήσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις.

i) Αν η $f \uparrow \mathrm{R}$,τότε $f(\mathrm{R})=\mathrm{R}$

ii) Αν $f(x) \le \kappa$, τότε το κ μέγιστη τιμή της f .

iii) Αν $f(f(x))=2015x^3+2000$ τότε η f είναι ''1-1''

iv) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς f είναι διάστημα

v) Αν μια συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο $[\alpha,\beta]$,τότε είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

vi) Αν f συνεχής σε διάστημα Δ ,τότε $f(\Delta)$ είναι διάστημα ή μονοσύνολο.

vii) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha).f(\beta)>0$ τότε δεν υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta): f(\xi)=0$

viii) Για κάθε f,g ισχύει $f \circ g = g \circ f$

ΘΕΜΑ ΙΙ

A. Έστω $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

i) Να ορίσετε την f^{-1}

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(\dfrac{1}{1-e}+2-f(\ln x)\right)=-1$

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+x^2.\,\eta\mu\dfrac{1}{x^2}}{x^2+1}+1\right)$

Β. Έστω $f : R \to R$ με $f^5(x) + f^3(x) + f(x) + x = 2015, \forall x \in R$

i) Να δείξετε ότι η f είναι “1-1’’

ii) Να ορίσετε την f^{-1}

iii) Να βρείτε $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x)\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

iv) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2015$

ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Α.

i) Έστω $f(x) = x^{\kappa} . \dfrac{4x^2 - 3x\eta\mu x + 5}{2x^5 + x\sigma\upsilon\nu x + 1}, \kappa \in \mathbb{Z}$.Να βρείτε $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

ii) Αν για τις συναρτήσεις f, g που ορίζονται στο R, ισχύουν:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2g(x) \right) = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x).g(x) = 0$

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

Β.

i) Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και ‘’1-1’’ τότε είναι γνησίως μονότονη (σε ένα διάστημα Δ).

ii) Να αποδείξετε ότι: Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, ώστε $(f \circ f)(x) + x = 0, \ \forall \ x \in R$.

C. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

$f^2(x) - (x+1) f(x) + x = 0, \forall x \in R$

ΘΕΜΑ IV

Α. Έστω f συνάρτηση $f : R \to R$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) = \dfrac{e^x}{2}, \forall x \in R$

Να αποδείξετε ότι :

i) Η $f \uparrow R$

ii) Η f συνεχής στο R

iii) Υπάρχει $\xi \in (0,1),\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(\xi) = \xi$

B. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R \to R$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f(0)=1,\ f(x) \neq x$ και $\dfrac{f(x)-x}{e^x} + \dfrac{e^x}{x-f(x)} = 0$, $\forall x \in R$
- g(x)= $\begin{cases} f(x), & x \leq 0 \\ \kappa - 2x - \ln(x+1), & x>0 \end{cases}$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + x$ και να βρείτε το κ.

ii) Να βρείτε το $g(R)$ και να δείξετε ότι η $g(x)=0$ έχει 2 ρίζες ετερόσημες.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{g(a)-1}{x-1} + \dfrac{g(\beta)-1}{\chi-2} = 2015$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$, για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$.

(ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3,5 h)