ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

1. Θεωρούμε κύκλο (c) με εξίσωση $x^2+y^2=10$ και το σημείο $M(4,2)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτομένες που άγονται από το σημείο Μ, προς τον κύκλο.

2. Να προσδιορίσετε το λ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): 2x-y+3=0$ να ορίζει χορδή πάνω στον κύκλο $(c): \ x^2+y^2-2\lambda x-2\lambda y=0$ που να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

3. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και η εξίσωση

$x^2+y^2-4|\vec{\alpha}|x+6|\vec{\beta}|y+12\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με $\rho=|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|$.

β) Δίνεται ότι το κέντρο του κύκλου c ανήκει στην ευθεία $\zeta: 2x+3y+2=0$ και η εφαπτομένη ε του c στο $\Lambda\left(|\vec{\alpha}|,-6|\vec{\beta}|\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{2}{3}$.

i) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=4$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$

ii) Να δείξετε ότι $3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\perp 2\vec{\alpha}-11\vec{\beta}$

iii) Να βρείτε $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$

iv) Να βρείτε τις εφαπτομένες του c στα σημεία που τέμνει τον $x'x$.

4. Δίνεται το σημείο $A(-1,0)$. Να δειχτεί ότι ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Β του τριγώνου ΟΑΒ στο οποίο η διάμεσος του ΟΔ έχει μήκος 1, είναι κύκλος $c:(x-1)^2+y^2=4$, εκτός του $(3,0)$ και του (-1,0).

5. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στον άξονα $y'y$ και στον κύκλο (c) με εξίσωση $(x-1)^2+y^2=1$.

(Υπ.: παραβολή)

6. **i)** Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 με μήκος 18. Τα άκρα M_1, M_2 κινούνται στους άξονες. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του M_1M_2, τέτοιων που το μήκος MM_2 είναι 6.

ii) Αν $M_1M_2 = d$ και $MM_2 = \kappa < d$ να βρεθεί πάλι ο γεωμετρικός τόπος του Μ.

(Υπ.: έλλειψη)

7. Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων Μ, από τα οποία άγονται εφαπτομένες προς την υπερβολή $(c): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, που τέμνονται κάθετα.

(Υπ.: Έστω $M(x_1, y_1)$ και η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ)

8. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι βρίσκονται στο 1^o τεταρτημόριο και εφάπτονται στον $x'x$ και εξωτερικά του $x^2 + y^2 = \rho^2$ είναι $x^2 = 2\rho\left(y + \frac{\rho}{2}\right)$, $x > 0$, $y > 0$.

9. Έστω $M(\lambda, 4-\lambda)$, $\lambda \in R$ και N: $d(N, E) = \left|\overrightarrow{ON} + \frac{1}{2}\vec{j}\right|$, $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

i) να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι των Μ, Ν

ii) να βρείτε το $\min\left|\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right|$.

10. Στην παραβολή $y = x^2$ εγγράφουμε ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{O}B$ με $\widehat{O} = 90^o$. Να βρείτε τα Α, Β ώστε το εμβαδόν να είναι ελάχιστο.

11. Δίνεται ο κύκλος $(c_1): (x-3)^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $\Lambda(-3, 0)$. Να αποδείξετε ότι:

i) Το Λ είναι εξωτερικό του κύκλου

ii) Τα κέντρα Μ των κύκλων που διέρχονται από το Λ και εφάπτονται στον c_1, ανήκουν σε κλάδο υπερβολής.

12. Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής $(c): x^2 - y^2 = 1$, που να έχουν την ελάχιστη απόσταση από το $A(0,1)$.

13. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία στο τρίγωνο ΜΑΒ ισχύει $\varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B = \kappa$, $\kappa \neq 0$.

(Υπ.: Σύστημα συντεταγμένων)

14. Θεωρούμε τα σημεία Μ και Ν που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\overrightarrow{KM}^2 - |\overrightarrow{KM}| = 2$, όπου $K(-3,4)$
- $|\overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}|$, όπου $A(3,-4)$ και $O(0,0)$.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_1 των σημείων Μ.

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_2 των σημείων Ν.

iii) Να δείξετε ότι $(MN) \geq \frac{11}{2}$.

iv) Αν τα σημεία M_1, M_2 ανήκουν στο C_1 και ισχύει $(M_1M_2) = 2$, να δείξετε ότι $|\overrightarrow{NM_1} + \overrightarrow{NM_2}| \geq \sqrt{117}$.

15. Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$, $B(1,2)$ και Ο, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_1 των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \frac{2\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OM}^2}$ και το σημείο Ν ανήκει στον άξονα $x'x$.

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_2 των σημείων $P(x,y)$, για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$.

iii) Να δείξετε ότι οι γεωμετρικοί τόποι C_1 και C_2 των παραπάνω ερωτημάτων έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

iv) Αν τα σημεία M_1, M_2 ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο C_1 και ισχύει $(M_1M_2) = \sqrt{3}$, να δείξετε ότι $|\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}| \leq \sqrt{13}$.

16. Θεωρούμε τα σημεία Μ και Ν για τα οποία ισχύουν:

- $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 36$, όπου $A(0,4)$ και $B(6,4)$
- Η εξίσωση $x^2 - 4x + \overrightarrow{ON}^2 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

i) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 των σημείων Μ είναι κύκλος με κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho_1 = 3$.

ii) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_2 των σημείων Ν είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2$.

iii) Να δείξετε ότι το σύστημα των ανισώσεων $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 \le 0 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση.

iv) Να δείξετε ότι: $(MN) \le 10$ και $|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| \le 10$.

17. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της έλλειψης $C: x^2 + 2y^2 = 6$ από την ευθεία $\varepsilon: x + y - 8 = 0$.