ΜΕΘΟΔΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Λύσεις στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Γ΄ Λυκείου 2013

ΘΕΜΑ Α
Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 334-335.
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 246.
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 222.
Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ
ΘΕΜΑ Β
Β1. $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow |z-2|=1$

$2|z-2|^2=2 \Leftrightarrow |z-2|^2=1 \Leftrightarrow |z-2|=1$ άρα ο γ.τ είναι κύκλος με $K(2,0)$, $\rho=1$.

$|z|=|z-2+2|\le|z-2|+|2|=2+1=3$. Ο $z-3$ ανήκει στον κύκλο, άρα $|z|\le 3$.

Β2. Ισχύουν $z_1^2+\beta z_1+\gamma=0$, $z_2^2+\beta z_2+\gamma=0$ και $|z_1-2|=1$, $|z_2-2|=1$,

$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$. Από τους τύπους Vietta: $z_1+z_2=-\beta$, $z_1\cdot z_2=\gamma$, $z_2=\bar{z}_1$

με $\Delta<0 \Leftrightarrow \beta^2-4\gamma<0 \Leftrightarrow \beta^2<4\gamma \Leftrightarrow |\beta|<2\sqrt{\gamma}$, $\gamma>0$

$z_2=\bar{z}_1 \Rightarrow \mathrm{Im}(z_2)=-\mathrm{Im}(z_1)$ και $z_2=\bar{z}_1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$

Χωρίς βλάβη γενικότητας $\mathrm{Im}(z_1)>0$ τότε $\mathrm{Im}(z_2)<0$.

Από $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |2\,\mathrm{Im}(z_1)|=2 \Leftrightarrow |\mathrm{Im}(z_1)|=1 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Im}(z_1)=1}$

Στο $|z-2|=1$ θέτω $z_1=x+i$, $x\in R$ άρα

$|x+i-2|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+1}=1 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Οπότε $z_1=2+i$ ενώ $z_2=2-i$

Τότε $z_1+z_2=-\beta$ και $z_1\cdot z_2=\gamma \Leftrightarrow 4=-\beta$ και $|z_1|^2=\gamma \Leftrightarrow$

$(\beta=-4$ και $\gamma=\sqrt{2^2+1^2}^{\,2}) \Leftrightarrow \beta=-4$ και $\gamma=5$.

Β3. $\nu^3=-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0 \Rightarrow |\nu^3|=|-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0| \Rightarrow$

$|\nu^3|\le|\alpha_2||\nu|^2+|\alpha_1||\nu|^2+|\alpha_0| \Rightarrow |\nu^3|\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3 \Rightarrow \boxed{|\nu^3|-3|\nu|^2-3|\nu|-3\le 0}$ (1)

Για $|\nu|=4$ η (1): $64-48-12-3=64-63=1$, δεν είναι ρίζα το 4. Τότε από την (1):

$|\nu^3|-3|\nu|^2-3|\nu|-3<1$ (για να είναι το 4 ρίζα) $\Leftrightarrow |\nu^3|-3|\nu|^2-3|\nu|-4<0$

Από σχήμα Horner: $(|\nu|-4)(|\nu|^2+|\nu|+1)<0 \Rightarrow |\nu|-4<0 \Rightarrow |\nu|<4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $2(f(x)+x)(f'(x)+1)=2x \Rightarrow \left((f(x)+x)^2\right)'=\left(x^2\right)' \Rightarrow (f(x)+x)^2=x^2+c$ (1)

Για $x=0$ η (1): $1+0=0+c \Rightarrow c=1$

$(f(x)+x)^2=x^2+1$ (2)

Έστω $g(x)=f(x)+x$, η (2): $g^2(x)=x^2+1>0$ (3)

Η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής. Αν υπάρχει $x_0\in R: g(x_0)=0$, τότε:

$g^2(x_0)=0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x_0^2+1=0 \Rightarrow x_0^2=-1$ αδύνατο. Άρα $g(x)\ne 0, \forall x\in R$, g συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημμο.

Από την (3): $|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$.

Άρα $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ ή $g(x)=-\sqrt{x^2+1}$

Όμως, $g(0)=1$ οπότε $g(x)=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \boxed{f(x)=\sqrt{x^2+1}-x}$ που επαληθεύει την αρχική και άρα είναι δεκτή.

Γ2. $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-|x|>0$

Αν $x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0\Rightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0\Rightarrow f'(x)<0$

Αν $x<0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x>0\Rightarrow-\sqrt{x^2+1}-x<0\Rightarrow x-\sqrt{x^2+1}<2x<0$. Άρα $f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$. Η $f\downarrow R$ και $f(0)=1$

Το $D_{fog}=\left\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in R/g(x)\in R\right\}=R$. Τότε $f(g(x))=f(0)\Rightarrow g(x)=0$, διότι η $f\downarrow$ άρα "$1-1$".

$\boxed{x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1=0}$

$g'(x)=3x^2+3x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 3x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$

$g'(x)>0\Leftrightarrow\ x<-1$ ή $x>0$

$g'(x)<0\Leftrightarrow -1<x<0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗	
			ΟΜ		ΟΕ		

$g(-1)=-\dfrac{1}{2}\quad g(0)=-1$

$g(-1)=-1+\dfrac{3}{2}-1=-2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{-1}{2}<0,\quad g(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$

Το $g((-\infty,0])=(-\infty,-1]$, το 0 δεν ανήκει σ΄αυτό, άρα η $g(x)=0$ αδύνατη.

Το $g((0,+\infty))=(-1,+\infty)$. Το $0\in(-1,+\infty)$ οπότε υπάρχει $x_1\in(0,+\infty):g(x_1)=0$

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,οπότε η ρίζα x_1 είναι μοναδική. Άρα η $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση.

Γ3. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\ge 0$. Άρα $f(x)>0$.

Έστω $h(x)=\displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Η συνάρτηση $\displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=-\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $-\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ και $x-\dfrac{\pi}{4}$, άρα η h συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$h(0)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt>0$ αφού $f(t)>0$. $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\displaystyle\int_0^0 f(t)dt-f(0)\,\text{εφ}\frac{\pi}{4}=-1<0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right):\ h(x_0)=0\Rightarrow\displaystyle\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}$

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}+\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right]=0$ (1)

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}\overset{5h=t}{=}0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}\cdot 5=5f'(1)$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\overset{-h=t}{=}0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}=f'(1)$

$h\to 0,\ t\to 0$

Η (1) $6f'(1)=0 \Rightarrow f'(1)=0$

Η $f'\uparrow$ άρα $x\geq 1 \Rightarrow f'(x)>f'(1)=0$

$0<x<1 \Rightarrow f'(x)<f'(1)=0$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$

Δ2. $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}\geq 0$ αφού $f(x)\geq f(1)=1$ από Δ1 και $x-1>0$ άρα η $g\uparrow(1,+\infty)$

Έστω $h(x)=\int_x^{x+1} g(u)du$, $u\in(1,+\infty)$, $h(x)=\int_\alpha^{x+1} g(u)du-\int_\alpha^{x} g(u)du$,

$h'(x)=g(x+1)-g(x)>0$ αφού η $g\uparrow(1,+\infty)$. Άρα η $h\uparrow R$.

Η δοθείσα ανίσωση γράφεται: $h\left(8x^2+5\right)>h\left(2x^4+5\right)$

$8x^2>2x^4 \Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0 \Leftrightarrow 2x^2\left(x^2-4\right)<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow (|x|<2 \text{ και } x\neq 0) \Leftrightarrow$

$-2<x<2$ και $x\neq 0$.

Δ3. Είναι $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}\geq 0$, $f(x)\geq 1, x>1$, $\quad g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-[f(x)-1]}{(x-1)^2}$

Στο $[1,x]$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Υπάρχει $\xi\in(1,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Rightarrow f'(\xi)(x-1)=f(x)-1$

Άρα $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-f'(\xi)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{\left(f'(x)-f'(\xi)\right)(x-1)}{(x-1)^2}>0$, αφού $x>1$, $\xi<x$ και $f'(\xi)<f'(x)$ από Δ1. Άρα η g κυρτή. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$(\alpha-1)g(x)=(f(\alpha)-1)(x-\alpha) \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Leftrightarrow g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$\boxed{g(x)-g'(\alpha)(x-\alpha)=0}$ (2)

Για $x=\alpha$ η (2) επαληθεύεται.

Έστω $h(x)=g(x)-g'(\alpha)(x-\alpha), x\in R$

$h'(x)=g'(x)-g'(\alpha)$ $\qquad$ $h''(x)=g''(x)>0 \Rightarrow$ η $h'\uparrow$

$x>\alpha \Rightarrow h'(x)>h'(\alpha)=0$ $\qquad$ $x>\alpha \Rightarrow h'(x)>h'(\alpha)=0$

Το πρόσημο της h' φαίνεται στον πίνακα:

	0	α	+∞
h′	−	0	+
h′	↘	Ολικό Ελάχιστο	↗

$h'(\alpha)=0$

$h'(x)\geq h'(\alpha)=0 \Rightarrow h'(x)\geq 0 \Rightarrow h\uparrow$ οπότε η (2) έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$.

Επιμέλεια θεμάτων
Κωστής Στρατής, μαθηματικός