ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ
Α ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$ ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα σύνολα

α) $A = \left\{ x \in N / \frac{x+10}{x} \in N^* \right\}$

β) $B = \left\{ x \in Z / \frac{(x^2+4)(x^2-6x+5)}{x^2-1} = 0 \right\}$

Να βρείτε τις $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

2. Έστω $f(x) = \sqrt{x-1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii) Αν $\alpha, \beta \geq 1$, να αποδειχθεί ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$. Πότε ισχύει το «ίσον»;

3. Έστω $f(x) = x^2 + x - 2$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

4. Αν $x, y, \omega \in R$ και $\sqrt{x^2-6x+25} + \sqrt{y^2-8y+25} + \sqrt{\omega^2-10\omega+34} = 10$, να βρείτε τα x, y, ω.

5. Να αποδειχθεί ότι: $\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\mu-\nu}} \cdot \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\nu-\rho}} \cdot \sqrt[\rho\mu]{\alpha^{\rho-\mu}} = 1$, $\alpha > 0$, $\mu, \nu, \rho \in N^*$.

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να δείξετε ότι:

i) $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

ii) $\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} \geq \alpha + \beta + \gamma$

iii) $\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha} \leq \alpha + \beta + \gamma$

7. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ είναι φυσικός.

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $|x-5|^3 + |5-x|^6 + |x^2-25|^9 = 0$

ii) $|x^2-1|^{1000} + |x^3-1|^{2000} + |x^8+x^5-2|^{3000} = 0$

9. Αν $|\alpha| < |\beta|$ και $|\alpha+\beta x| < |\alpha x+\beta|$, να αποδειχθεί ότι $|x| < 1$.

10. Να λυθεί η εξίσωση $||x-2|-3| + x = 5$.

11. Δίνονται οι $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ με $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 9$

iii) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

12. Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β, γ και x, y, ω πραγματικοί. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} \geq \left(\frac{x+y}{\alpha+\beta}\right)^2$

ii) $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{\omega^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

iii) Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$, τότε $\frac{1}{1+\alpha\beta} + \frac{1}{1+\beta\gamma} + \frac{1}{1+\gamma\alpha} \geq \frac{3}{2}$

13. Αν $\frac{\lambda}{\alpha-\beta} = \frac{\mu}{\beta-\gamma} = \frac{\nu}{\alpha-\gamma}$ να δείξετε ότι $\lambda+\mu = \nu$.

14. Αν διαδοχικοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$, να αποδείξετε ότι:

i) $\beta\delta - \alpha\gamma$ περιττός

ii) $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ άρτιος

iii) $\dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{2} \in Z$

15. **i)** Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2(x - \lambda^2) = 2(2\lambda^2 - x + 2)$

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει μοναδική λύση

$$x = \lambda(1 + 2\lambda)$$

Δίνονται οι θετικοί α, β, γ. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta)$

β) $\dfrac{1}{\alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta\gamma} + \dfrac{1}{\beta^3 + \gamma^3 + \alpha\beta\gamma} + \dfrac{1}{\gamma^3 + \alpha^3 + \alpha\beta\gamma} \leq \dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}$

16. Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{7 + 3\sqrt{5}} = 2$

17. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + \gamma - \beta)x^2 + 2\gamma x + \beta + \gamma - \alpha = 0$ με $\beta \neq \alpha\gamma$. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

ii) η εξίσωση έχει ρίζες ρητούς αριθμούς

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2\alpha - 1)x + \alpha^2 + 2 = 0$.

i) Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ ώστε μια ρίζα της εξίσωσης να είναι διπλάσια της άλλης.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $x_1 x_2 + x_1 + x_2 \leq 0$ ως προς α.

19. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in R^*$ με $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

iii) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 4\alpha\beta\gamma = 1$

20. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

21. **i)** Να αποδείξετε ότι $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

ii) Αν είναι $13(x^2+y^2)=(2x+3y)^2$ να δείξετε ότι $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$

iii) Αν $4w+z=1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της w^2+z^2.

22. Να αποδείξετε ότι:

i) $(x-y)^2+4xy=(x+y)^2$

ii) Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 400, να βρείτε εκείνο που έχει την ελάχιστη περίμετρο.

23. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^4}{3\alpha\beta\gamma-\beta^3-\gamma^3}+\frac{\beta^4}{3\alpha\beta\gamma-\gamma^3-\alpha^3}+\frac{\gamma^4}{3\alpha\beta\gamma-\beta^3-\alpha^3}=0$$

24. Αν $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ και $\frac{x}{\alpha-\beta}=\frac{y}{\beta-\gamma}=\frac{\omega}{\gamma-\alpha}$, να δείξετε ότι $x^3+y^3+\omega^3=3xy\omega$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f\left(\frac{1}{2004}\right)+f\left(\frac{2}{2004}\right)+...+f\left(\frac{2004}{2004}\right)$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)(x^2+2x+2)}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(1)f(2)f(3)...f(2003)$

27. Να λυθεί η εξίσωση $3^{2004}+(x^2-1)^2+(x^2-2x+1)^{2002}=(3-|x-1|)^{2004}$

28. Να λυθεί:

$$\frac{x-16}{1988}+\frac{x-12}{1992}+\frac{x-8}{1996}+\frac{x-4}{2000}=\frac{x-1998}{16}+\frac{x-1992}{12}+\frac{x-1996}{8}+\frac{x-2000}{4}$$

29. **i)** Να λυθεί η εξίσωση $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{\lambda-x}=\frac{2}{2\lambda-x}$, $\lambda \in R$

ii) Αν $x_0=\frac{2\lambda(\lambda-4)}{\lambda+2}$ είναι η μοναδική λύση, να βρείτε $\lambda \in R$ ώστε $x_0<0$.