ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΝΑΛΥΣΗ – ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Αν G μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού λογισμού;

Γ. Να χαρακτηρίσετε αν είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) η πρόταση

α) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1-1» αλλά όχι γνησίως μονότονες.

β) Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha + i\beta = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0)$

γ) Δύο συναρτήσεις με ίδιο πεδίο ορισμού και ίδιο σύνολο τιμών είναι ίσες.

δ) Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $z^3 = w^3$ τότε $z = w$

ΘΕΜΑ 2

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq 0$, $w = \frac{1}{z}$. Οι διανυσματικές τους ακτίνες είναι κάθετες.

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z κινούνται σε δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $z^4 < 0$

γ) Έστω επιπλέον ότι ισχύει

$$\left|\frac{z^2 - 1}{z}\right| = \sqrt{2}$$

ι) να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

ιι) το $\mathrm{Im}\left(\frac{(z+i)^5}{z^5 + i}\right) = 0$

ιιι) Να βρείτε το $|\upsilon|$, αν $\frac{1}{\upsilon} = \frac{3}{\overline{z}} - \frac{4}{\overline{zi}}$

Β. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και η παράσταση $A(z) = \frac{zi}{|z - \sqrt{6}| - |z + \sqrt{6}|}$

ι) Να βρείτε για ποιούς μιγαδικούς z ορίζεται η $A(z)$

ιι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z αν $|A(z)| = \frac{|z|}{2\sqrt{3}}$

ιιι) Να βρείτε την εικόνα του z που απέχει ελάχιστη απόσταση από το Κ (0,2)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x)=\ln\frac{1}{f(0)}+\int_0^x\frac{f(t)}{f(t)+1}dt,\forall x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και $|f(\beta)-f(\alpha)|\le|\beta-\alpha|,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)+\ln f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 f(x)dx=-\frac{f^2(0)}{2}-f(0)+\frac{3}{2}$$

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε f^{-1}

ε) Να βρείτε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

ΘΕΜΑ 4

i) Να δειχτεί ότι $2\le I\le 2e$, όπου $I=\int_{-1}^{1}e^{x^2}dx$

ii) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της $g(x)=\int_x^I\frac{f(t)}{\ln t}dt$, f συνεχής στο $\Re$.

iii) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f,g για τις οποίες $x\cdot f(x)=g(x)+1,\forall x\in\Re$.

iv) Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e, x=e^2$ ισούται με $\alpha\ln 4$, να βρείτε τον τύπο της f.

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!