ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΝΑΛΥΣΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω $f(x) = x^{\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \nu \cdot x^{\nu-1}$

Β. Να δώσετε τον ορισμό

- **i)** η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$
- **ii)** η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$

Γ. Να απαντήσετε χωρίς δικαιολόγηση στις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε συνεχής στο x_o

β) Η f είναι συνεχής και «1-1» τότε γνησίως μονότονη.

γ) Οι ανισώσεις $z^2 - 5z + 6 > 0$ και $z^2 + 6 > 5z$ είναι ισοδύναμες στο $\mathbb{C}$

δ) Το πλήθος των συνεχών συναρτήσεων $f : f^2(x) = x^z$ είναι 2.

ε) Από την $|z + w| \leq |z| + |w|$ η ελάχιστη τιμή του $|z + w|$ είναι $|z| + |w|$, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

στ) Οι εικόνες των $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z_3 = iz$ είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με $z \neq 0$

η) Αν $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, τότε $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}, x \in \mathbb{R}^*$

ΘΕΜΑ 2

Α. ι) Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ Αν η εικόνα του z ανήκει στη διχοτόμο (δ) των θετικών ημιαξόνων, να βρεθεί που κινείται η εικόνα του $w = z + \frac{1}{z}$

ιι) Έστω z τυχαίος μιγαδικός, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\Pi = |z| + |z - 1| + |z - i| + |z - 1 - i|$$

Για ποια τιμή του z η παράσταση γίνεται ελάχιστη;

Β. Έστω $z : |2z - 4i| = 2$, να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης $B = |z + 3 + 2i|$ καθώς και τις εικόνες των z που επιτυγχάνονται.

ΘΕΜΑ 3

Α. Αν για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t+3t^2}{e^t+1}dt, x\in\mathbb{R}$

να δείξετε ότι:

α) $f(x)=x^3+x$

β) $\lim_{x\to-\infty} f(x)\cdot e^x=0$

γ) η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της $M(x_o,f(x_o))$ ξανατέμνει την C_f.

Β. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει

$$x\int_1^x f(t\cdot x)dt\le x^3-x$$

ι) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f, παράλληλη στην διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

ιι) Αν $f(x)\ne 0$ για κάθε $x>0$, τότε να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f, $x'x$ και $x=2, x=4$ είναι $E\le 6$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$ για την οποία ισχύει $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)-f(x)f'(x)=1-x, \forall x\in\mathbb{R}$

α) να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$

β) Αν $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι $\left|\sqrt{\beta^2+1}-\sqrt{\alpha^2+1}\right|<|\alpha-\beta|$

γ) Έστω $G(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ να ορίσετε την $G^{-1}(x)$ και να βρείτε το $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$

δ) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 (f(x)-x)dx>\frac{1}{2}$$

ε) Αν $\beta>\alpha$ να δείξετε ότι

$$(\beta-\alpha)\sqrt{\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2+1}\le\int_\alpha^\beta\sqrt{x^2+1}dx$$