ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

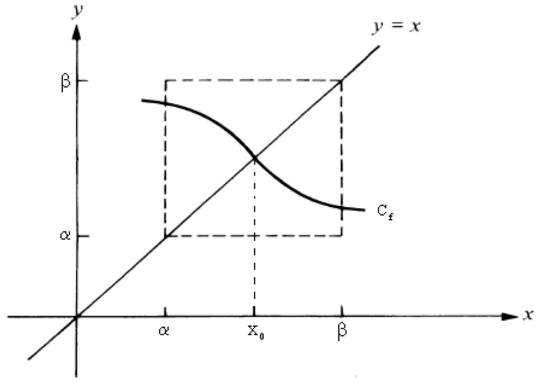
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Εφαρμογή 1

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ έχει ένα τουλάχιστον **σταθερό σημείο**.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ με $f(x_0)=x_0$.



Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$

$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha\ge 0$

$g(\beta)=f(\beta)-\beta\le 0$

- Αν $f(\alpha)-\alpha=0\Rightarrow f(\alpha)=\alpha\Rightarrow x_0=\alpha$
- Αν $f(\beta)-\beta=0\Rightarrow f(\beta)=\beta\Rightarrow x_0=\beta$
- Αν $f(\alpha)\ne\alpha$ και $f(\beta)\ne\beta$ τότε $(f(\alpha)-\alpha)(f(\beta)-\beta)<0\Leftrightarrow g(\alpha)g(\beta)<0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $g(x_0)=0$ δηλαδή $f(x_0)=x_0$.

Εφαρμογή 2

Έστω $f:R\to Q$, αν η f είναι συνεχής τότε είναι σταθερή.

Απόδειξη

Έστω $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)\ne f(x_2)$

Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι $f(x_1)<f(x_2)$, τότε η f επειδή είναι συνεχής θα παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές του διαστήματος $[f(x_1),f(x_2)]$.

Άρα θα παίρνει και άρρητες, άτοπο ως προς την υπόθεση.

Σχόλιο

Μεταξύ δύο ρητών, υπάρχει πάντα ένας άρρητος.

Εφαρμογή 3

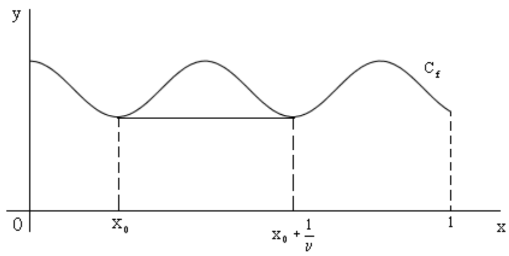
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, $f(0)=f(1)$, τότε για κάθε ακέραιο ν υπάρχει χορδή της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στον $x'x$ με μήκος $\frac{1}{\nu}$.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{\nu}\right)$.

Έστω $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)$, $x \in \left(0,1-\frac{1}{\nu}\right)$

Η g είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών



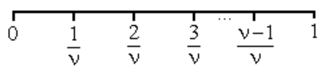
$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{\nu}\right)=f\left(\frac{1}{\nu}\right)-f\left(\frac{2}{\nu}\right)$$

$$g\left(\frac{2}{\nu}\right)=f\left(\frac{2}{\nu}\right)-f\left(\frac{3}{\nu}\right)$$

…………………………..

$$g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)-f(1)$$



Με πρόσθεση κατά μέλη

$$g(0)+g\left(\frac{1}{\nu}\right)+g\left(\frac{2}{\nu}\right)+\ldots+g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=f(0)-f(1)=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{g(0)+g\left(\frac{1}{\nu}\right)+g\left(\frac{2}{\nu}\right)+\ldots+g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=0} \quad (1)$$

Για να είναι ένα τέτοιο άθροισμα 0, θα είναι: όλοι μηδέν ή τουλάχιστον δύο ετερόσημοι.

i) Αν όλοι είναι μηδέν τότε:

$$g(0)=g\left(\frac{1}{\nu}\right)=g\left(\frac{2}{\nu}\right)=\ldots=g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=0$$

$$f(0)=f\left(\frac{1}{\nu}\right)=f\left(\frac{2}{\nu}\right)=\ldots=f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

ii) Αν υπάρχουν 2 ετερόσημοι:

Έστω $g(\kappa)\cdot g(\lambda)<0$ με $\kappa,\lambda\in\left\{0,\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu},...,\frac{\nu-1}{\nu}\right\}$ και $\kappa<\lambda$ τότε στο $[\kappa,\lambda]$ η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει το $x_0\in(\kappa,\lambda)\subset[0,1]$: $g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{\nu}\right)$

Σχόλιο

Από την (1): Αν η g δεν έχει καμιά ρίζα τότε λόγω της συνέχειας, θα διατηρούσε πρόσημο, οπότε το πρώτο μέλος της (1) θα ήταν θετικό ή αρνητικό, άρα άτοπο. Επομένως, η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[0,\frac{\nu-1}{\nu}\right]$.

Εφαρμογή 4

Αν μια συνάρτηση f μηδενίζεται σε κάθε ρητό αριθμό ενός διαστήματος Δ, τότε μηδενίζεται σε κάθε σημείο του Δ ($f(x)=0$, για κάθε $x\in\Delta$.)

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε άρρητο x_0 του Δ είναι $f(x_0)=0$.
Αν $(x_\nu)_{\nu\in N}$, μια ακολουθία του Δ με $x_\nu\to x_0$, επειδή η f είναι συνεχής, τότε $f(x_\nu)\to f(x_0)$ με $x_\nu\in Q$
Ισχύει $f(x_\nu)=0$ άρα $f(x_0)=0$.

Εφαρμογή 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0, & x\in Q\\ 1, & x\notin Q\end{cases}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο $x_0\in R$.

Απόδειξη

Έστω $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθία ρητών $x_\nu\to x_0$ και $(y_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθία άρρητων με $y_\nu\to x_0$. Η $f(x_\nu)\to f(x_0)$ και $f(y_\nu)\to f(x_0)$. Άρα $f(x_0)=0$ και $f(x_0)=1$ άτοπο.

Σχόλιο

Η παραπάνω συνάρτηση είναι γνωστή ως συνάρτηση του Diriclet, είναι περιοδική με περίοδο οποιονδήποτε θετικό αριθμό και δεν μπορεί να γίνει το γράφημα της.

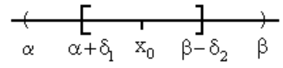
Εφαρμογή 6

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α,β) και ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=+\infty$,

τότε η f έχει ελάχιστο στο (α,β).

Απόδειξη

Έστω x_0 ένα οποιοδήποτε σημείο του (α,β).



Επειδή $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=+\infty$ υπάρχει $\delta_1>0$ και οσοδήποτε μικρό τέτοιο ώστε οι τιμές θετικές και πολύ μεγάλες, άρα $f(x_1)>f(x_0)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=+\infty$ υπάρχει $\delta_2>0$ και οσοδήποτε μικρό τέτοιο ώστε οι τιμές της f θετικές και πολύ μεγάλες, άρα $f(x)>f(x_0)$.

Στο $[\alpha+\delta_1,\beta-\delta_2]$ η f ως συνεχής, παίρνει μια ελάχιστη τιμή $f(x_1)$, $x_1\in[\alpha+\delta_1,\beta-\delta_2]$, άρα $f(x)\geq f(x_1)$ (1)

Επίσης, $f(x_0)\geq f(x_1)$ (2)

αφού $x_0\in[\alpha+\delta_1,\beta-\delta_2]$.

Αν $x\notin[\alpha+\delta_1,\beta-\delta_2]$: $f(x)\geq f(x_0)$ (3)

Από (1), (2), (3): $f(x)\geq f(x_1)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Άρα το $f(x_1)$ είναι το ελάχιστο της f στο (α,β).

Σχόλιο

Τα δ_1,δ_2 είναι θετικά και οσοδήποτε μικρά, τέτοια ώστε $\alpha+\delta_1<x_0<\beta-\delta_2$

Εφαρμογή 7

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Απόδειξη

Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, ν περιττός, $\alpha_\nu\neq 0$, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_\nu\in R$.

Ας υποθέσουμε $\alpha_\nu>0$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^\nu=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha_\nu x^\nu=-\infty$

Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in R$: $x_1<0$ και $P(x_1)<0$, $x_2>0$ και $P(x_2)>0$.

Στο $[x_1, x_2]$ η P ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$: $P(x_0)=0$.

Αν $\alpha_\nu < 0$ εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο.

Εφαρμογή 8

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η f με $f(x)=\begin{cases} x \ , \ x \in Q \\ 1-x, \ x \notin Q \end{cases}$

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in R$ και (x_ν) ακολουθία ρητών με $x_\nu \to x_0$, (y_ν) ακολουθία άρρητων $y_\nu \to x_0$. Λόγω συνέχειας της f ισχύει $f(x_\nu) \to f(x_0)$ και $f(y_\nu) \to f(x_0)$
$f(x_\nu) = x_\nu \to x_0$ και $f(y_\nu) = (1-y_\nu) \to 1-x_0$
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x_0 \neq 1-x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq \frac{1}{2}$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \neq \frac{1}{2}$
- Αν $x_0 = \frac{1}{2}$ θα δείξουμε με ε, δ ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = \frac{1}{2}$. Αρκεί $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : 0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta$ να ισχύει $\left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon$.

Η ανισότητα $\left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon$ γράφεται $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, $x \in Q$ ή $\left| 1 - x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, $x \in R - Q$ δηλαδή $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \ \forall x \in R$.

Άρα αν $\delta = \varepsilon$ τότε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon : \ 0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta$ να ισχύει $\left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon$ οπότε η f συνεχής στο $x_0 = \frac{1}{2}$.