ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ

Στην παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε ιδιότητες των διανυσμάτων, για να βρούμε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή παραστάσεων με μία, δύο και περισσότερες μεταβλητές. Κεντρική ιδέα της αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz $\vec{\alpha}\vec{\beta} \le |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ και η ανισότητα $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

Εφαρμογές

1. Να προσδιορίσετε την μέγιστη τιμή της παράστασης $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$

Λύση

Έστω $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}\sqrt{x}\\\sqrt{2-x}\end{bmatrix}$ τότε $f(x)=\vec{u}\cdot\vec{v}$ (1) με $x\in[0,2]$.

Όμως $f(x)=\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{u},\vec{v})=3\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\omega$, όπου $\hat{\omega}=(\vec{u},\vec{v})$, $0\le\omega<90$.

Τότε αφού $\vec{u}\cdot\vec{v}\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ θα έχουμε $f_{max}=3\sqrt{2}$.

2. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+(312-y)^2}+\sqrt{y^2+(130-x)^2}$$

Λύση

Θεωρούμε τα σημεία $A(0,312)$, $B(130,0)$, $M(x,y)$

Τότε $|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|\ge|\overrightarrow{AB}|$ ή $f(x,y)=|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|\ge|\overrightarrow{AB}|$ ή

$$f(x,y)\ge\sqrt{312^2+130^2}=338$$

Ασκήσεις

1. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

i) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2}+\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}+5$

ii) $y=\sqrt{5x^2+20}+\sqrt{5x^2-32x+64}+\sqrt{5x^2-40x+100}+\sqrt{5x^2-8x+16}$

iii) $y=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}+1)x+1}$

iv) $f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-2\alpha\beta)^2}+\sqrt{(x-\alpha^2+\beta^2)^2+y^2}$ **,** $\alpha,\beta\in R$

v) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της

$$f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{\frac{1-x}{2}} \qquad (1)$$

2. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} &x^2+y^2=-y(x+z) \\ &x^2+x+y=-2xyz \qquad\qquad (\Sigma) \\ &3x^2+8y^2+8xy+8xz=2x+2+4z \end{aligned}$$

3. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή των παραστάσεων:

i) $f(x)=\sqrt{4\sigma\upsilon\nu^2x+1}+\sqrt{4\eta\mu^2x+1}$

ii) $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$ **,** $x\ge 0$

iii) $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$

iv) $y=5\eta\mu x-12\sigma\upsilon\nu x$

v) $y=5-7\eta\mu x-24\sigma\upsilon\nu x$

vi) $A(x,y,z)=8x+6y-5z$ όταν $x^2+y^2+z^2=5$ (Ε.Μ.Ε. 1984)

vii) $f(\alpha)=\sqrt{3\alpha+1}+\sqrt{2\alpha+3}+\sqrt{17-5\alpha}$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΙΣΟΤΗΤΕΣ

Με την βοήθεια των ιδιοτήτων των διανυσμάτων και με χρήση $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, $\vec{\alpha}\vec{\beta} \le |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ βρίσκουμε ανισότητες και ισότητες.

Εφαρμογές

1. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{3x^2-2x+1}+\sqrt{3x^2-4x+2} \ge \dfrac{\sqrt{51}}{3}$ (1) $\forall x \in R$

Απόδειξη

Η (1) γράφεται $\sqrt{x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}}+\sqrt{x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}} \ge \dfrac{\sqrt{17}}{3}$ (2)

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}+\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}} \ge \frac{\sqrt{17}}{3} \quad (3)$$

Θεωρούμε τα σημεία $M(x,0)$, $A\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Είναι $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{9}}$, $|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{9}}$

Όμως $|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}| \ge |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

Ώστε ισχύει η (2), άρα και η (1).

Το ίσον ισχύει, αν και μόνο αν, το M ανήκει στο τμήμα AB, δηλαδή αν $\overrightarrow{AM}=\kappa\overrightarrow{MB}$ ($\kappa \in R$)

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{x-\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=-1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{3}=-x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} f(x,y)=&\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}+\\ &+3\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5} \ge 3\sqrt{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+$$
$$+3\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} \qquad (2)$$

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}x+1\\ y\end{bmatrix},\ \vec{\beta}=\begin{bmatrix}x+3\\ y\end{bmatrix},\ \vec{\gamma}=\begin{bmatrix}x+1\\ y-2\end{bmatrix},\ \vec{\delta}=\begin{bmatrix}x+2\\ y-1\end{bmatrix}$$

Είναι :

$$f(x,y)=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|+3|\vec{\delta}|=\left(|\vec{\alpha}|+|\vec{\delta}|\right)+\left(|\vec{\beta}|+|\vec{\delta}|\right)+\left(|\vec{\gamma}|+|\vec{\delta}|\right)\geq$$

$$\geq|\vec{\alpha}-\vec{\delta}|+|\vec{\beta}-\vec{\delta}|+|\vec{\gamma}-\vec{\delta}|=\sqrt{(-1)^2+1}+\sqrt{1^2+1^2}+\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$$

Το ίσον ισχύει αν

$$|\vec{\alpha}|+|\vec{\delta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\delta}|,\ |\vec{\beta}|+|\vec{\delta}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|,\ |\vec{\gamma}|+|\vec{\delta}|=|\vec{\gamma}-\vec{\delta}|$$

δηλαδή αν $\vec{\delta}=\vec{\alpha}$, οπότε $x=-2$, $y=1$.

Τότε $f(-2,1)=\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i) Αν $\alpha,\beta,x,y\in R$:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\left(x-\alpha^2+\beta^2\right)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2\alpha\beta)^2}>\alpha^2+2\alpha\beta$$

ii) $\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+\beta^2}+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\geq 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ **,** $\alpha,\beta,\gamma\in R$

iii) $\sqrt{x^2-40x+401}+\sqrt{x^2-30x+229}+\sqrt{x^2-20x+109}>2\sqrt{26}$

2. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\beta(\alpha-\beta)}+\sqrt{\beta(\gamma-\beta)}\leq\sqrt{\alpha\cdot\gamma}$ $\quad\alpha>\beta$**,** $\gamma>\beta$**,** $\alpha,\beta,\gamma\in R_+^*$

ii) $\sqrt{5x+15}+\sqrt{8-2x}\leq 7$

iii) $\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{1-x^2}\leq 3$

iv) $\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\ldots+\sqrt{x_{2\nu}^2+(1-x_1)^2}\geq\nu\cdot\sqrt{2}$

πότε ισχύει το ίσον σε καθεμία;

3. Ομοίως

α)

i) $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{\gamma^2}{2}$, $\alpha+\beta \geq \gamma \geq 0$

ii) $\alpha^4+\beta^4 \geq \frac{\gamma^4}{8}$

iii) $\alpha^8+\beta^8 \geq \frac{\gamma^6}{128}$

β) Αν κ, λ, μ θετικοί ακέραιοι και ΑΒΓ τρίγωνο να αποδείξετε ότι :

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2 \geq 2\mu\lambda\sigma\upsilon\nu A+2\mu\kappa\sigma\upsilon\nu B+2\kappa\lambda\sigma\upsilon\nu\Gamma$

4. Θεωρούμε το σύστημα διανυσμάτων $\vec{u}_\nu=\begin{bmatrix} x_\nu \\ y_\nu \end{bmatrix}$, $\nu \in N^*$ για τις συντεταγμένες

του ισχύουν: $x_{\nu+1}^2+x_\nu=y_\nu$ (1) $y_{\nu+1}=x_\nu+2-y_\nu$

Αν $\nu \geq 2$ να αποδείξετε ότι $|\vec{u}_\nu|^2 \geq \frac{7}{4}$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Να επιλύσετε τις εξισώσεις

α) $\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{17}$ (1)

β) $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x+4y-1}{\sqrt{17}}$ (2)

ΛΥΣΗ

α) Η (1) γράφεται $\sqrt{(x+2)^2+1^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{17}$

Θεωρούμε τα σημεία $M(x,0)$, $A(-2,1)$, $B(-1,-3)$. Τότε είναι:

$|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}| \geq |\overrightarrow{AB}|$ ή $\sqrt{(x+2)^2+1^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2} \geq \sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

Το ίσον ισχύει αν και μόνο αν $\overrightarrow{AM}=\kappa\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} x+2 \\ -1 \end{bmatrix}=\kappa\begin{bmatrix} 1-x \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\frac{1}{x+2}=\frac{-3}{-1-x} \Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}$

β) Έστω $\vec{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Τότε $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{17}$

Ακόμα $\vec{u}\vec{v}=x+4y \leq |\vec{u}||\vec{v}|=\sqrt{17(x^2+y^2)}$ οπότε

$$x+4y-1<\sqrt{17}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ή} \quad \frac{x+4y-1}{\sqrt{17}}<\sqrt{x^2+y^2}$$

Επομένως η (2) είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να επιλύσετε τις εξισώσεις

i) $\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+2x+9}=\sqrt{22}$

ii) $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$

2. Έστω $\alpha\le\beta\le\gamma$ και $x\le y\le z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\alpha+\beta=x+y$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, τότε $\alpha=x$, $\beta=y$.

β) Αν $\alpha+\beta+\gamma=x+y+z$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ τότε $\alpha=x$, $\beta=y$, $\gamma=z$.

3. Αν η ισότητα $x^\nu+y^\nu=\alpha^\nu+\beta^\nu$ ισχύει για $\nu=1,2$, να αποδείξετε ότι ισχύει για κάθε $\nu\in N$, όπου $x,y,\alpha,\beta\in R$.

4. Να επιλύσετε το σύστημα

$$\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+...+\sqrt{1+x_{100}}=100\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

$$\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+...+\sqrt{1-x_{100}}=100\sqrt{1-\frac{1}{100}}$$

5. Αν ισχύει $\sqrt{5}\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x+1=y^2-2y+5$ δείξτε ότι $\varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Οι διανυσματικές εξισώσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες, τόσο στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, όσο και στην επίλυση προβλημάτων Μηχανικής.

Οι μέθοδοι που ακολουθούμε είναι οι εξής:

1) *Αλγεβρική* (αντικατάσταση των συντεταγμένων των διανυσμάτων)
2) *Γεωμετρική*
3) *Διανυσματική*: Χρησιμοποιούμε αποκλειστικά ιδιότητες διανυσμάτων π.χ. πολλαπλασιάζουμε με διάνυσμα τα μέλη της εξίσωσης.

   Προσοχή: Η προσεταιριστική ιδιότητα δεν ισχύει γενικώς για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ δηλαδή $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right)\neq\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}$. Επομένως δεν έχει έννοια η παράσταση $\left(\vec{\alpha}\right)^{\nu}$, $\nu\in N^{*}$, $\nu\geq 3$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$. Να προσδιορίσετε διάνυσμα x ώστε $\vec{u}\cdot\vec{x}=4$, $\vec{v}\cdot\vec{x}=35$.

Λύση

Έστω $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$. Τότε $\begin{matrix}3x_1-2x_2=4\\5x_1+x_2=35\end{matrix}$

όπου $x_1=\dfrac{Dx_1}{D}$, $x_2=\dfrac{Dx_2}{D}$. Άρα $\vec{x}=\begin{bmatrix}\dfrac{Dx_1}{D}\\\dfrac{Dx_2}{D}\end{bmatrix}$

2. Έστω $\vec{\alpha}\neq 0$ και $\lambda\in R$. Να επιλύσετε την διανυσματική εξίσωση $\vec{x}^{2}+2\vec{\alpha}\vec{x}+\lambda=0$ (1)

Λύση

Έστω $\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$, $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ οι συντεταγμένες των $\vec{\alpha}$, $\vec{x}$ σε ορθοκανονικό σύστημα oxy.

Τότε η (1) γράφεται:

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+2(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)+\lambda=0$ ή

$(x_1+\alpha_1)^2+(x_2+\alpha_2)^2=\alpha_1^{\ 2}+\alpha_2^{\ 2}-\lambda=|\vec{\alpha}|^2-\lambda$ ή

$(x_1+\alpha_1)^2+(x_2+\alpha_2)^2=|\vec{\alpha}|^2-\lambda \quad (2)$

i) $\Delta=|\vec{\alpha}|^2-\lambda<0$ Η (1) αδύνατη.

ii) $\Delta=|\vec{\alpha}|^2-\lambda=0$ Τότε η (1) έχει μοναδική λύση $x=-\vec{\alpha}$ διότι είναι $(\vec{x}+\vec{\alpha})^2=\vec{0}$

iii) $\Delta=|\vec{\alpha}|^2-\lambda>0$ Τότε τα διανύσματα $\vec{x}$ έχουν άκρα κύκλο $\Sigma(\kappa,R)$ με $\kappa(-\alpha_1,-\alpha_2)$ και $R=\sqrt{|\vec{\alpha}|^2-\lambda}$ ενώ αρχή ένα σημείο ο.

3. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq-1$, να λύσετε την εξίσωση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}-\vec{x}$

Λύση

Είναι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}-\vec{x}\Leftrightarrow\vec{x}+(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma} \quad (1)$

Θα βρούμε πρώτα το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}$ και στη συνέχεια το $\vec{x}$. Από την (1) έχουμε:

$\alpha\left[\vec{x}+(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}\right]=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\left[1+\vec{\alpha}\vec{\beta}\right]=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\vec{\beta}}$$

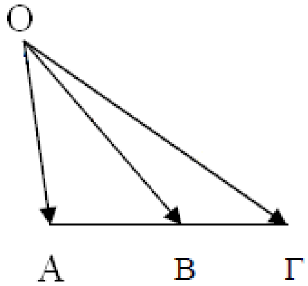
Έτσι η (1) δίνει $\vec{x}=\gamma-(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{\gamma}-\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\vec{\beta}}\right)\cdot\vec{\beta}$

ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ Ι

Έστω Ο, Α, Β, Γ σημεία.

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά, είναι να υπάρχουν κ, λ, μ όχι όλοι 0 με $\kappa+\lambda+\mu=0$ και $\kappa\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\mu\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}$

(Τα κ, λ, μ δεν ορίζονται μονοσήμαντα, π.χ. 2κ, 2λ, 2μ).



ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Έστω Α, Γ με $\mathrm{A}\neq\Gamma$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα σημείο Β να ανήκει στον φορέα της ΑΓ είναι να υπάρχει $\kappa\in\mathrm{R}^*$: $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\kappa\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\kappa)\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$

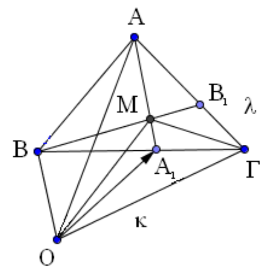
ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1$ των ΒΓ, ΓΑ τέτοια ώστε

$\frac{\Gamma\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_1\mathrm{B}}=\kappa,\quad \frac{\Gamma\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_1\mathrm{A}}=\lambda$

Αν Μ το σημείο τομής των AA_1, BB_1 να αποδείξετε ότι

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\kappa\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}}{\lambda+\kappa+1}$, Ο σημείο του χώρου.



Απόδειξη

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}+\kappa\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\kappa+1}\quad(1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\lambda+1}\quad(2)$$

Επειδή Α, Μ, A_1 και Β, Μ, B_1 συνευθειακά υπάρχουν κ_1,λ_1

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\kappa_1\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+(1-\kappa_1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\lambda_1\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}+(1-\lambda_1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\kappa_1\overrightarrow{OA_1}+(1-\kappa_1)\overrightarrow{OA}=\lambda_1\overrightarrow{OB_1}+(1-\lambda_1)\overrightarrow{OB}\Rightarrow$$

$$\left(1-\kappa_1-\frac{\lambda\lambda_1}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{\kappa\kappa_1}{1+\kappa}+\lambda_1-1\right)\overrightarrow{OB}+\left(\frac{\kappa_1}{1+\kappa}-\frac{\lambda_1}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$$

Επειδή Α, Β, Γ δεν είναι συγγραμμικά και

$$1-\kappa_1-\frac{\lambda\lambda_1}{1+\lambda}+\frac{\kappa\kappa_1}{1+\kappa}+\lambda_1-1+\frac{\kappa_1}{1+\kappa}-\frac{\lambda_1}{1+\lambda}=0$$

θα είναι

$$\left.\begin{aligned}&1-\kappa_1-\frac{\lambda\lambda_1}{1+\lambda}=0\\&1-\lambda_1-\frac{\kappa\kappa_1}{1+\kappa}=0\\&\frac{\kappa_1}{1+\kappa}-\frac{\lambda_1}{1+\lambda}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\kappa_1=\frac{1+\kappa}{\kappa+\lambda+1},\lambda_1=\frac{1+\lambda}{\kappa+\lambda+1}$$

Όμως $\overrightarrow{OM}=\kappa_1\overrightarrow{OA_1}+(1-\kappa_1)\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{\lambda\overrightarrow{OA}+\kappa\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}}{\kappa+\lambda+1}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν G το σημείο τομής των διαμέσων τριγώνου ΑΒΓ τότε $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}}{3}$

2. Έστω AA_1, BB_1 οι διχοτόμοι των $\widehat{A},\widehat{B}$ του ΑΒΓ αντίστοιχα και Ι το έκκεντρο τότε $\overrightarrow{OI}=\dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{O\Gamma}}{\alpha+\beta+\gamma}$.

3. Αν Η το σημείο τομής των υψών AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ του ΑΒΓ τότε

α) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\varepsilon\varphi A\overrightarrow{OA}+\varepsilon\varphi B\overrightarrow{OB}+\varepsilon\varphi\Gamma\overrightarrow{O\Gamma}}{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma}$

β) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\varepsilon\varphi B\overrightarrow{OB}+\varepsilon\varphi\Gamma\overrightarrow{O\Gamma}}{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma}$