Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Στα μαθηματικά εμφανίζονται προτάσεις ή ανισότητες με μια λέξη **ισχυρισμοί**, οι οποίοι εξαρτώνται από ένα φυσικό αριθμό. Για να αποδείξουμε προτάσεις αυτής της μορφής, χρησιμοποιούμε μία αποδεικτική μέθοδο, γνωστή ως **μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής.**

Θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής:

Έστω P(ν) ένας ισχυρισμός που εξαρτάται από ένα θετικό αριθμό (**ακέραιο**) ν.

Αν ισχύουν ότι:

α) Ο ισχυρισμός P(1) είναι αληθής

β) Υποθέτοντας ότι ο ισχυρισμός P(κ) είναι αληθής, αποδεικνύεται ότι και ο ισχυρισμός P($\kappa+1$) είναι αληθής, τότε ο ισχυρισμός P(ν) είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Παρατήρηση

Πολλές φορές ζητείται να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός P(ν) αληθεύει όχι για κάθε θετικό ακέραιο ν, αλλά για $\nu \geq \nu_0$, όπου ν_0 θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1. Σ' αυτή την περίπτωση δείχνουμε ότι ο ισχυρισμός P(ν_0) είναι αληθής και κατόπιν υποθέτοντας ότι P(κ) αληθής ($\kappa > \nu_0$), αποδεικνύουμε ότι P($\kappa+1$) αληθής. Τότε ο ισχυρισμός P(ν) είναι αληθής $\forall \nu \geq \nu_0$.

Μεθοδολογία

Εφαρμογή Ι

1. Να αποδείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες του Bernoulli

   i) $(1+\alpha)^{\nu} \geq 1+\nu\alpha$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \geq -1$

   ii) $(1-\alpha)^{\nu} \geq 1-\nu\alpha$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \leq 1$

   Απόδειξη:

   i) Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της επαγωγής.

   - Για $\nu=1$: $(1+\alpha)^1 \geq 1+1\cdot\alpha$ ισχύει
   - Έστω ότι ισχύει και για $\nu=\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}^*$) δηλαδή $(1+\alpha)^{\kappa} \geq 1+\kappa\cdot\alpha$
   - Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$ δηλαδή ότι ισχύει $(1+\alpha)^{\kappa+1} \geq 1+(\kappa+1)\cdot\alpha$

     Πράγματι:

     $(1+\alpha)^{\kappa+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^{\kappa} \geq (1+\alpha)(1+\kappa\alpha) \Rightarrow$
     $(1+\alpha)^{\kappa+1} \geq 1+\kappa\alpha+\alpha+\kappa\alpha^2 = 1+(\kappa+1)\alpha+\kappa\alpha^2 > 1+(\kappa+1)\cdot\alpha$

     Άρα $(1+\alpha)^{\kappa+1} \geq 1+(\kappa+1)\cdot\alpha$

     Συνεπώς $(1+\alpha)^{\nu} \geq 1+\nu\alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

   ii) α) Ομοίως

   β) τρόπος

   $\alpha \leq 1 \Rightarrow 1-\alpha \geq 0$ και λόγω της i)

   $\left(1+(-\alpha)\right)^{\nu} \geq 1+\nu(-\alpha) \Rightarrow$

   $\left(1-\alpha\right)^{\nu} \geq 1-\nu\alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

Εφαρμογή ΙΙ

Να αποδείξετε ότι: για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 3$ ισχύει $3^{\nu} > (\nu+1)^2$

Απόδειξη:

Για $\nu=\nu_0=3$ έχουμε $3^3 > (3+1)^2$ Δηλαδή $27>16$ αληθής

Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για $\nu=\kappa \in \mathbb{N}^*$, $\kappa>3$

Δηλαδή $3^{\kappa} > (\kappa+1)^2$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+1$ δηλαδή ότι

$3^{\kappa+1} > (\kappa+2)^2$ (I)

Πράγματι

$3^{\kappa+1} = 3\cdot 3^{\kappa} > 3(\kappa+1)^2$ Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$3(\kappa+1)^2 > (\kappa+2)^2$ δηλαδή

$3\kappa^2 + 6\kappa + 3 > \kappa^2 + 4\kappa + 4 \Rightarrow 2\kappa^2 + 2\kappa > 1 \Rightarrow$

$2\kappa(\kappa+1) > 1$ (II)

Η τελευταία ανισότητα θα την δείξουμε με τέλεια επαγωγή

Έστω P(ν): $2\nu(\nu+1) > 1$

Για $\nu = 1$: $2\cdot 2 > 1$ αληθής

Έστω για $\nu = \kappa$: $2\cdot\kappa(\kappa+1) > 1$ αληθής

Θα δείξουμε $2\cdot(\kappa+1)(\kappa+2) > 1$

Αρκεί $2\cdot(\kappa+1)(\kappa+2) > 2\kappa(\kappa+1) \Leftrightarrow$

$2\cdot(\kappa+1)\left[\kappa+2-\kappa\right] > 0 \Leftrightarrow$

$2\cdot(\kappa+1)\cdot 2 > 0 \Leftrightarrow 4(\kappa+1) > 0$ αληθής

Άρα $2\nu(\nu+1) > 1 \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$ άρα και για $\nu \geq 3$.

Τότε ισχύει και η (I)

Άρα $3^{\nu} > (\nu+1)^2 \quad \forall\, \nu \geq 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ αποδείξτε ότι:

   i) $1+2+3+\ldots+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

   ii) $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

   iii) $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$

   iv) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}\geq\sqrt{\nu}$

2) Να αποδείξετε ότι:

   i) Αν $\lambda \geq 0$, τότε ισχύει $\lambda^{\nu} > \nu\cdot(\lambda-1)$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

   ii) Αν $\lambda > 1$, τότε υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda^{\nu} > \nu\cdot\theta$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

   iii) Αν $0<\lambda<1$, τότε υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda^{-\nu} > \nu\cdot\theta$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

3) Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ και $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu$ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει η ανισότητα των **Gauchy – Buniakowski – Schwartz**

   $(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2 \leq (\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}+\ldots+\alpha_\nu^{\,2})\cdot(\beta_1^{\,2}+\beta_2^{\,2}+\ldots+\beta_\nu^{\,2})$

   Συντομογραφικά

   $$\left(\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\beta_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i^{\,2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i^{2}\right)$$