

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι λύσεις των τριγωνομετρικών εξισώσεων απεικονίζονται πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και δημιουργούν διάφορα σχήματα.

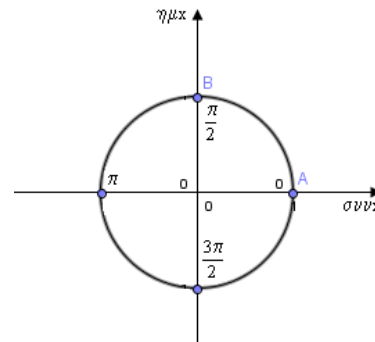
Παράδειγμα I

Να λυθεί $\eta\mu x = 1$

Λύση

$$\text{Είναι } \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Η λύση απεικονίζεται στο Β.



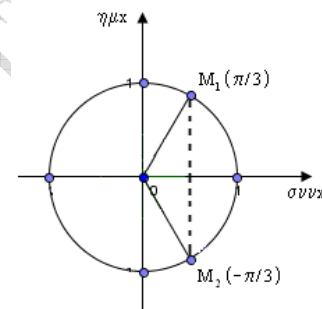
Παράδειγμα II

Να λυθεί $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$

Λύση

$$\text{Είναι } \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Ανήκουν πάνω στην ευθεία $x = \frac{\pi}{3}$.



Παράδειγμα III

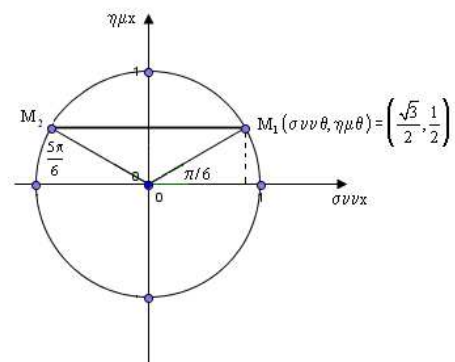
Να λυθεί $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

Λύση

Η λύση αυτής $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

$$\left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \right)$$

Οι λύσεις ανήκουν στον κύκλο και στην $y = \frac{1}{2}$.



Παράδειγμα IV

Να λυθεί $\eta\mu 3x = 1$

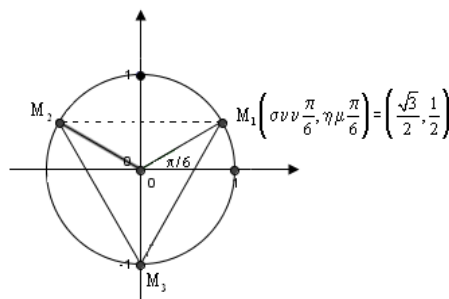
Λύση

$$\text{Είναι } \eta\mu 3x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Από τον τύπο, προκύπτουν λύσεις που

απεικονίζονται στα σημεία M_1, M_2, M_3 και $\widehat{AM_1} = \frac{\pi}{6}$. Οι λύσεις είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου πλευράς $\sqrt{3}$ πάνω στο τριγωνομετρικό κύκλο.



Παράδειγμα V

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 2x = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)$

Λύση

Η αρχική γίνεται:

$$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad \text{ή} \quad 2x = 2\rho\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

$$x = \kappa \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x = \lambda \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}.$$

(I)

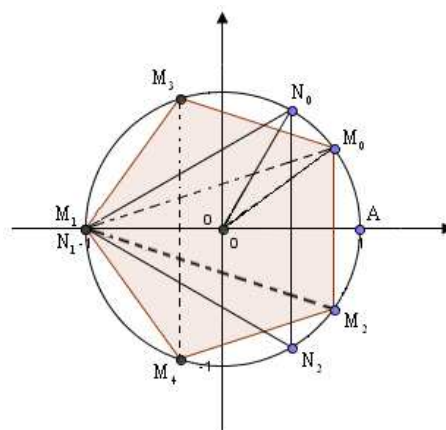
(II)

Από τον τύπο (I) προκύπτουν λύσεις, $\kappa = 0, 1, 2, 3, 4$ που απεικονίζονται στα σημεία M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 και δημιουργούν **κανονικό**

κανονικό πεντάγωνο (αστεροειδές), $\widehat{AM_0} = \frac{\pi}{5}$.

Από τον τύπο (II) προκύπτουν λύσεις, οι οποίες απεικονίζονται στον κύκλο και στα

σημεία N_0, N_1, N_2 με $\widehat{AN_0} = \frac{\pi}{3}$.



Παράδειγμα VI

Να λυθεί η εξίσωση $\sin 7x = \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)$

Λύση

$$7x = 2k\pi + 3x + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad 7x = 2k\pi - \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$x = k\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{24} \quad \text{ή} \quad x = k\frac{2\pi}{10} - \frac{\pi}{60}$$

(1) (2)

Οι λύσεις που προκύπτουν, $k = 0, 1, 2, 3$ από την (1) απεικονίζονται επί του τριγωνομετρικού κύκλου και είναι κορυφές **τετραγώνου**.

Οι λύσεις που προκύπτουν από την (II) απεικονίζονται επί του τριγωνομετρικού κύκλου και είναι κορυφές κανονικού δεκάγωνου με $k = 0, 1, 2, \dots, 9$.

$$\left(\omega_v = \frac{2\pi}{v}, \phi_v + \omega_v = 180^\circ, \frac{\lambda_v^2}{4} + \alpha_v^2 = R^2 \right)$$

ω_v : κεντρική γωνία

ϕ_v : γωνία κανονικού v -γωνου

Παράδειγμα VII

Να λυθεί η εξίσωση: $\sin^2 y = \eta \mu^2 x$

Λύση

Η αρχική ισοδύναμη γράφεται:

$$(\sin y - \eta \mu x)(\sin y + \eta \mu x) = 0 \Leftrightarrow (\sin y = \eta \mu x \quad \text{ή} \quad \sin y = -\eta \mu x) \Leftrightarrow$$

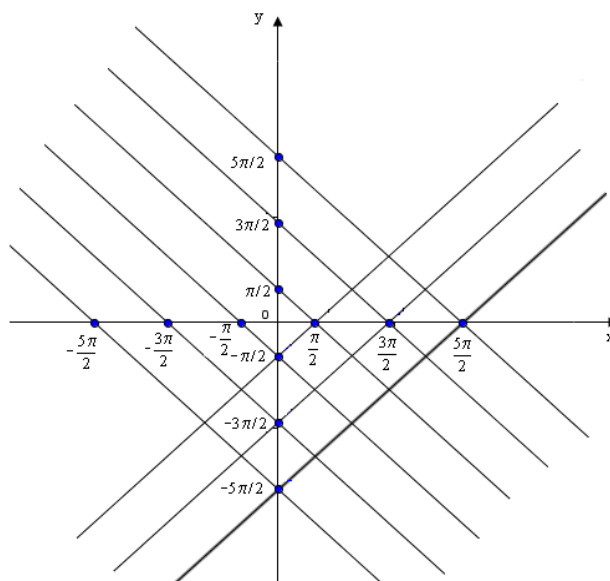
$$\left(\sin y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \text{ή} \quad \sin y = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(y = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \quad \text{ή} \quad y = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)$$

$y = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ή} \quad y = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Είναι ευθείες.

Οι λύσεις απεικονίζονται γραφικά πάνω σε ευθείες.



Παράδειγμα VIII

Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\phi 2x = \sqrt{3}$ (1)

Λύση

Αρχικά για το πεδίο ορισμού πρέπει και αρκεί $2x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Η (1)} \Rightarrow \varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Οι λύσεις της (2) απεικονίζονται επί του τριγωνομετρικού κύκλου και είναι κορυφές

τετραγώνου $A_0A_1A_2A_3$, που προκύπτουν $\kappa = 0, 1, 2, 3$, $\widehat{AA_0} = \frac{\pi}{6}$.

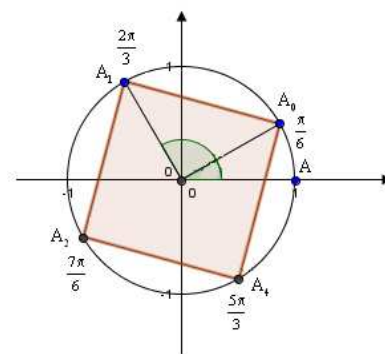
$$\text{Το } A_0 \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_1 \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Η πλευρά του τετραγώνου είναι:

$$A_1A_0 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{4+4}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\text{ή } A_1A_0 = \sqrt{OA_0^2 + OA_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λύσετε και να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις στον τριγωνομετρικό κύκλο, βρίσκοντας το επίπεδο σχήμα, του οποίου είναι κορυφές.

1. $\eta\mu 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\eta\mu 4x = -\frac{1}{2}$

3. $\eta\mu\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

4. $\sigma\upsilon\nu 7x = \sigma\upsilon\nu\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

5. $\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\sigma\upsilon\nu^2\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu^2 2x$

7. $\epsilon\phi\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

8. $\epsilon\phi 7x \cdot \epsilon\phi 3x = 1$