ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Πρόταση:

Το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου που έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, $|\lambda|<1$ είναι

$$S_\nu = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$$

Το άθροισμα $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + ...$

Εφαρμογή 1:

Να υπολογίσετε το άθροισμα : $4+\frac{4}{3}+\frac{4}{3^2}+...+\frac{4}{3^\nu}+...$

Λύση:

Οι άπειροι όροι $4, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3^\nu}, \ldots$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. με $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = \frac{1}{3}$.

Άρα $S_\nu = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{3-1}{3}} = 6$.

Εφαρμογή 2:

Να βρείτε το κοινό κλάσμα , από το οποίο παράγεται το δεκαδικό περιοδικό κλάσμα $4,513513...$

Λύση:

Το δεκαδικό κλάσμα (περιοδικό) γράφεται

$$4+\frac{513}{1000}+\frac{513}{(1000)^2}+\frac{513}{(1000)^3}+...$$

Αλλά $\frac{513}{1000}+\frac{513}{(1000)^2}+... = \frac{\frac{513}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}$

Άρα $4,513513... = 4+\frac{513}{999} = \frac{4509}{999}$

Εφαρμογή 3:

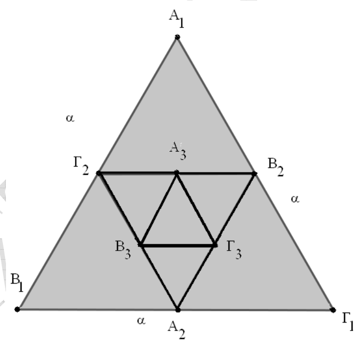
Συνδέουμε τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των πλευρών ισοπλεύρου τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ του οποίου η πλευρά είναι α. Στη συνέχεια συνδέουμε τα μέσα του $A_2B_2\Gamma_2$ και έστω $A_3B_3\Gamma_3$ το επόμενο τρίγωνο του οποίου συνδέουμε τα μέσα, κ.ο.κ.

Να υπολογιστεί το άθροισμα των περιμέτρων και των εμβαδών των απείρων τριγώνων.

Λύση:

Είναι γνωστό ότι: Το ύψος και το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τους τύπους:

$\upsilon = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $E = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ αντίστοιχα.



- Στο $A_1B_1\Gamma_1$ έχουμε περίμετρο 3α και εμβαδόν $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{4}$
- Στο $A_2B_2\Gamma_2$ έχουμε περίμετρο $\dfrac{3\alpha}{2}$ και εμβαδό $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$
- Στο $A_3B_3\Gamma_3$ έχουμε περίμετρο $\dfrac{3\alpha}{4}$ και εμβαδόν $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{64}$
- ………..

Άρα: άθροισμα περιμέτρων

$$S = 3\alpha + \frac{3\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{4} + \ldots = \frac{3\alpha}{1-\frac{1}{2}} = 6\alpha$$

Άθροισμα εμβαδών:

$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{64} + \ldots = \alpha^2\sqrt{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) = \alpha^2\sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}$$

Εφαρμογή 4:

Να λυθεί η εξίσωση

$$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right]x^3=216$$

Λύση:

Το άπειρο πλήθος που έχουμε μέσα στην αγκύλη είναι γεωμετρική πρόοδος με $|\lambda|=\frac{1}{2}<1$.

Άρα $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

Και η εξίσωση γίνεται $x^3=216\Rightarrow x=6$

Εφαρμογή 5:

Να αποδειχτεί ότι $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\ldots}}}}$ (άπειρο πλήθος ριζικών) $=\alpha$

Απόδειξη:

$$\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\ldots}}}}=\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\ldots}}}=\alpha^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{4}}\sqrt[8]{\alpha\sqrt{\alpha\ldots}}=\alpha^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[16]{\alpha\ldots}=$$

$$=\alpha^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{8}}\alpha^{\frac{1}{16}}\ldots=\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}=\alpha^{1}$$

ΜΙΚΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός:

Μία ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, ...$ καλείται μικτή γεωμετρική πρόοδος τότε και μόνο τότε, όταν ο ν-ιοστός όρος αυτής α_ν, για κάθε ν είναι γινόμενο των ν-ιοστών όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_1, ω) και μιας γεωμετρικής (β_1, λ), δηλαδή για κάθε ν ο α_ν είναι της μορφής

$$\left\{\alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega\right\}\cdot\left\{\beta_1\lambda^{\nu-1}\right\}$$

Πρόταση:

Αν S_ν το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας μικτής γεωμετρικής προόδου με νιοστό όρο $\gamma_\nu = \left\{\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right\}\cdot\beta_1\lambda^{\nu-1}, (\lambda \neq 1)$ τότε

$$S_\nu = \frac{\alpha_1\beta_1 - \left\{\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right\}\beta_1\lambda^\nu}{1-\lambda} + \frac{\beta_1\omega\lambda\left(1-\lambda^{\nu-1}\right)}{(1-\lambda)^2}$$

Απόδειξη:

Επειδή $S_\nu = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1 + \omega)\beta_1\lambda + ... + \left\{\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right\}\beta_1\lambda^{\nu-1}$

Έπεται ότι

$$S_\nu \cdot \lambda = \alpha_1\beta_1\lambda + (\alpha_1 + \omega)\beta_1\lambda^2 + ... + \left\{\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right\}\beta_1\lambda^\nu$$

Με αφαίρεση κατά μέλη έπεται ότι:

$$S_\nu(1-\lambda) = \alpha_1\beta_1 + \omega\beta_1\lambda + \omega\beta_1\lambda^2 + ... + \omega\beta_1\lambda^{\nu-1} - \left\{\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right\}\beta_1\lambda^\nu =$$

$$\alpha_1\beta_1 + \frac{\omega\beta_1\lambda^\nu - \omega\beta_1\lambda}{\lambda - 1} - \left\{\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right\}\beta_1\lambda^\nu$$ Άρα:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1\beta_1 - \left\{\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right\}\beta_1\lambda^\nu}{1-\lambda} + \frac{\beta_1\omega\lambda\left(1-\lambda^{\nu-1}\right)}{(1-\lambda)^2}$$

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Άσκηση

Να υπολογιστεί το άθροισμα

$S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots + \nu\alpha^{\nu-1}, \quad \alpha \neq 1 \quad (1)$

Λύση

Παρατηρούμε ότι ο ν-ιοστός όρος είναι γινόμενο ν-ιοστών όρων αριθμητικής $(1,1)$ και γεωμετρικής $(1,\alpha)$.

Τότε εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με λ:

$\lambda \cdot S = \alpha \cdot S = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + \nu\alpha^{\nu} \quad (2)$

Με αφαίρεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$S(1-\alpha) = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots + \nu\alpha^{\nu-1} - \left\{\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + \nu\alpha^{\nu}\right\}$$

$$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\nu-1} - \nu\alpha^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu} - 1}{\alpha - 1} - \nu\alpha^{\nu} \Rightarrow$$

$$S(1-\alpha) = \frac{1-\alpha^{\nu}}{1-\alpha} - \frac{\nu\alpha^{\nu}}{1} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1-\alpha^{\nu}}{(1-\alpha)^2} - \frac{\nu\alpha^{\nu}}{1-\alpha}$$

Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{3\alpha_\nu + 4}{5}$ $\forall \nu \in N$. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με γενικό όρο $\beta_\nu = \alpha_\nu - 2$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος με $\omega = \frac{3}{5}$. Ύστερα να βρείτε τους νιοστούς όρους β_ν και α_ν των ακολουθιών (β_ν) και (α_ν) αντιστοίχως συναρτήσει του ν.

2. Έστω η ακολουθία α_ν, $\nu = 3, \ldots \nu$, με $\alpha_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2})$ και $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ με γενικό όρο $\beta_\nu = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\omega = -\frac{1}{2}$. Στη συνέχεια να εκφράσετε το α_ν συναρτήσει των α, β και ν.

3. Έστω η ακολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ για την οποία είναι:

$\alpha_{\nu+2} = \xi\alpha_{\nu+1} + n\alpha_\nu$ $\forall \nu \in N$, $\xi, n \in R$

Να αποδείξετε ότι:

Αν ο λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, όπου $\alpha_1 \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - \xi x - n = 0$, τότε η ακολουθία (α_ν) $\nu \in N$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος.

4. Συνδέουμε τα μέσα $A_2, B_2, \Gamma_2, \Delta_2$ των πλευρών $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ τετραγώνου πλευράς α. Μετά συνδέουμε τα μέσα $A_3, B_3, \Gamma_3, \Delta_3$ των πλευρών $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$, έπειτα τα μέσα των πλευρών, κ.ο.κ. Να βρεθεί ως συνάρτηση του α, το άθροισμα των περιμέτρων των τετραγώνων που σχηματίζονται.

5. Σε κύκλο με ακτίνα ρ εγγράφουμε τετράγωνο, σ' αυτό εγγράφουμε κύκλο, στον κύκλο νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Να βρεθεί συναρτήσει του ρ, το άθροισμα των εμβαδών των απείρων σε πλήθος i) κύκλων και ii) τετραγώνων.

6. Έστω οι θετικοί αριθμοί α, β, γ, και θετικοί ακέραιοι λ, μ, ν με $\sqrt[\lambda]{\alpha}=\sqrt[\mu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\gamma}\neq 1$. Να δείξετε ότι οι α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν οι λ, μ, ν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

7. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των κ πρώτων όρων είναι 0, να αποδείξτε ότι το άθροισμα των μ επόμενων όρων της είναι $\dfrac{\alpha_1\cdot(\kappa+\mu)\cdot\mu}{1-\kappa}$, $\kappa>1$.

8. Αν οι α, β, γ διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου να δείξετε ότι οι $\alpha(\beta+\gamma)$, $\beta(\gamma+\alpha)$, $\gamma(\alpha+\beta)$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

9. Να βρεθεί ο $\lambda\in Z$ ώστε η εξίσωση $x^4-(3\lambda+1)x^2+(4\lambda-3)=0$ να έχει 4 ρίζες διαφορετικές και να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

10. Αν το σύστημα $\begin{cases}\alpha x-\beta y=\gamma\\ \alpha x^2+2\beta x+\gamma y^2=0\end{cases}$ $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$ έχει λύση δείξτε ότι α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

11. Να βρεθεί ο (μέγιστος) αριθμός των χωρίων που σχηματίζονται από ν ευθείες στο επίπεδο. [Απ.: $1+\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$]

12. Να βρεθεί ο (μέγιστος) αριθμός των χωρίων που σχηματίζονται από ν κύκλους στο επίπεδο. [Απ.: $\nu^2-\nu+2$, $\nu\geq 1$]