ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ΑΡΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός

Μία αλγεβρική ανίσωση: $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$ καλείται άρρητη ανίσωση τότε και μόνο τότε, όταν το ένα τουλάχιστον μέλος της είναι άρρητη αλγεβρική παράσταση του x.

Παραδείγματα: Κάθε μία από τις ανισώσεις $\sqrt{2x^2+x+7} > x-3$, $\sqrt{2x+1} > \sqrt{x-2}$ είναι άρρητη ανίσωση.

Πρόταση Ι

Αν ν είναι περιττός φυσικός τότε η άρρητη ανίσωση

$$A(x) > B(x) \Leftrightarrow [A(x)]^{\nu} > [B(x)]^{\nu}$$

Πρόταση ΙΙ

Αν ν είναι άρτιος φυσικός, τότε η άρρητη ανίσωση $A(x) > B(x)$ διίσταται στα συστήματα

i. $A(x) > 0$ και $B(x) \leq 0$

ii. $A(x) > 0$ και $B(x) \geq 0$ και $[A(x)]^{\nu} > [B(x)]^{\nu}$

iii. $A(x) \leq 0$ και $B(x) < 0$ και $[A(x)]^{\nu} < [B(x)]^{\nu}$

Παρατήρηση

Αν μία άρρητη ανίσωση έχει περισσότερα του ενός ριζικά, τότε με κατάλληλο μετασχηματισμό καταλήγουμε σε συστήματα ρητών ανισώσεων, ισοδύναμα με τη δοθείσα.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την ανίσωση $2x-1 > \sqrt{x^2-3x+3}$

Λύση

Η δοθείσα ανίσωση ισοδυναμεί με τα συστήματα

$$\left\{x^2-3x+3 \geq 0 \quad \text{και} \quad 2x-1 \geq 0 \quad \text{και} \quad (2x-1)^2 > x^2-3x+3\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{2x-1 \geq 0 \quad \text{και} \quad (2x-1)^2 > x^2-3x+3\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{x \geq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad 3x^2 - x - 2 > 0\right\}$$

(διότι το $x^2 - 3x + 3$ είναι μονίμως θετικό, αφού $\Delta < 0$)

$$\left\{x \geq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \left(x > 1 \;\text{ή}\; x < -\frac{2}{3}\right)\right\}$$. Άρα $x > 1$.

2. Με $\alpha, \beta \in R$ και $\alpha - \beta \neq 0$ να επιλύσετε και να διερευνήσετε την ανίσωση

$$x - \alpha > \sqrt{x - \beta} \qquad (I)$$

Λύση

Η (Ι) ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\left\{x \geq \beta \quad \text{και} \quad x > \alpha \quad \text{και} \quad (x\text{-}\alpha)^2 > (x - \beta)\right\} \qquad (II)$$

i) Αν $\alpha > \beta$, τότε η (Ι) ισοδυναμεί με το σύστημα

$x > \alpha$ και $x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha^2 + \beta > 0$

Θέτω $f(x) = x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha^2 + \beta$ (III)

Παρατηρώ ότι:

$f(\alpha) = \beta - \alpha < 0$, $f(\beta) = (\alpha - \beta)^2 > 0$ ***Θα συγκρίνω το β με το ημιάθροισμα των ριζών***

$\beta - \dfrac{2\alpha + 1}{2} = \dfrac{2(\beta - \alpha) - 1}{2} < 0$. Άρα το $f(x)$ έχει πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους. Έστω ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ με την εξής διάταξη $\beta < \rho_1 < \alpha < \rho_2$.

Επομένως η (III) σπάει στα συστήματα

$\{x > \alpha \quad \text{και} \quad x < \rho_1\}$, $\{x > \alpha \quad \text{και} \quad x < \rho_2\}$

Το πρώτο είναι αδύνατο, άρα $x > \rho_2$ όπου ρ_2 η μεγαλύτερη ρίζα του $f(x) = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta)$

ii) Αν $\alpha < \beta$ τότε η (ΙΙ) ισοδυναμεί προς το σύστημα

$\{x \geq \beta \quad \text{και} \quad f(x) > 0\}$ (IV)

Είναι όμως: $f(\alpha) = \beta - \alpha > 0$, $f(\beta) = (\alpha - \beta)^2 > 0$

Θα συγκρίνω το α,β με το ημιάθροισμα των ριζών

$\alpha - \dfrac{2\alpha+1}{2} = \dfrac{-1}{2} < 0$ και $\beta - \dfrac{2\alpha+1}{2} = \beta - \alpha - \dfrac{1}{2}$

και $\Delta = 4(\alpha - \beta) + 1$

α) Αν $\Delta < 0$ δηλαδή $\beta > \alpha + \dfrac{1}{4}$ τότε η $f(x) > 0$ είναι μονίμως θετική. Έχει λοιπόν η (I) σύνολο λύσεων το διάστημα $[\beta, +\infty)$.

β) Αν $\Delta = 0$ δηλαδή $\beta = \alpha + \dfrac{1}{4}$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R - \left\{\dfrac{2\alpha+1}{2}\right\}$. Άρα η (I) έχει σύνολο λύσεων $\left[\beta, \dfrac{2\alpha+1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{2\alpha+1}{2}, +\infty\right)$ διότι $\beta - \alpha - \dfrac{1}{2} < 0$.

γ) Αν $\Delta > 0$ δηλαδή $4(\alpha - \beta) + 1 > 0 \Leftrightarrow \beta < \alpha + \dfrac{1}{4}$ τότε

$\beta - \alpha - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4} < 0$

Άρα η f έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2.

Έστω $\rho_1 < \rho_2$ τότε $\alpha < \beta < \rho_1 < \rho_2$ και η (IV) ισοδυναμεί

$\{x \geq \beta \text{ και } x < \rho_1\}$, $\{x \geq \beta \text{ και } x > \rho_2\}$

Άρα το σύνολο λύσεων

$S = [\beta, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$, ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του $f(x)$.

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $\sqrt{x^2+1} < 2x+1$

ii) $\sqrt{1-x^2} > 2x+1$

iii) $\sqrt{(x+1)(x+3)}+1 < x$

iv) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1} < \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

v) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} < \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Να επιλύσετε και να διερευνήσετε τις ανισώσεις

i) $\sqrt{x+\lambda} > x$

ii) $\sqrt{3x(5-x)} < \lambda - x$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $x-2 < \sqrt{2x+11}$

ii) $3x-4 > |x-2|\sqrt{x+4}$

iii) $x+\sqrt{x^2-10x+9} > \sqrt{x+2\sqrt{x^2-10x+9}}$

iv) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt[3]{x-2}$