ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$, με ακέραιους συντελεστές ο αριθμός $P(2)$ είναι άρτιος. Να αποδείξετε ότι και ο $P(0)$ άρτιος.

2. Αν για το πολυώνυμο $f(x)=\alpha+\beta x^{\nu}$, $\nu\in N$. Ισχύει $f(1)=-8$, $f(2)=-1$, $f(4)=55$ να βρείτε την τιμή του ν.

3. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού με σταθερό όρο το 0, τέτοιο ώστε $P(x)-P(x-1)=x(x-1)$. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+\nu(\nu+1)$$

4. Για ένα πολυώνυμο P ισχύει $P(x^2)=P(x^5)$, για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι είναι σταθερό.

5. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in R$ το κλάσμα $\dfrac{(\alpha+1)x^2-4x+\beta-2}{x^2+2x+3}$ παίρνει την ίδια τιμή για όλα τα $x\in R$.

6. Ένα πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές και μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα ρ. Να αποδειχθεί ότι:

i) αν ρ άρτιος και κ άρτιος, τότε $f(\kappa)$ άρτιος,

ii) αν ρ περιττός και κ περιττός τότε το $f(\kappa)$ άρτιος.

7. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+x-12}+\frac{x^2+x-12}{x^2-x-12}=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}+\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$$

8. **α)** Να αποδειχθεί ότι η μόνη θετική ρίζα της

$$x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+x^3+\frac{1}{x^3}+\ldots+x^{\nu}+\frac{1}{x^{\nu}}=2\nu \quad \text{είναι } x=1$$

β) Να λυθεί $\sqrt[3]{x+4}=1+\sqrt[3]{x-3}$

9. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός ρ. Αν για $\alpha,\beta \in R$ η εξίσωση $x^3-\alpha x+\beta=0$ έχει τρεις πραγματικές λύσεις, εκ των οποίων μία είναι ο ρ, να δειχθεί ότι $\alpha \geq \frac{3\rho^2}{4}$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)$, $x \in R$ με ακέραιους συντελεστές, ώστε να ισχύει $f(1)\cdot f(9)\cdot f(8)=1988$. Να δειχθεί ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της $f(x)=0$, τότε ο ρ δεν είναι ακέραιος.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές και ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τους θετικούς κ, λ με $\kappa \neq \lambda$. Να δείξετε ότι $|f(\kappa+\lambda)-(\kappa+\lambda)| \geq \kappa\cdot\lambda$.

12. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $P(x^2)=x^2(x^2+1)\cdot P(x)$ και $P(2)=12$ να βρείτε το $P(x)$.

13. Να λυθεί ως προς $x, y \in R$ η εξίσωση $x^2+2x\cdot \sigma\upsilon\nu(x\cdot y)+1=0$

14. Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές. Αν για τους διαφορετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει $P(\alpha)=P(\beta)=P(\gamma)=P(\delta)=5$ να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει $\lambda \in Z$ τέτοιος ώστε $P(\lambda)=8$.

15. Δίνεται $P(x)=(x^2-4x+4)^{2010}+(x^2-5x+5)^{2011}$.

i) Να βρείτε τον σταθερό όρο

ii) Να βρείτε το άθροισμα συντελεστών του

iii) Να αποδείξετε ότι $P(3)=0$

iv) Να αποδείξετε ότι ο $9^{2010}+11^{2011}$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

ΛΥΜΕΝΑ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$, με ακέραιους συντελεστές ο αριθμός $P(2)$ είναι άρτιος. Να αποδείξετε ότι και ο $P(0)$ άρτιος.

Λύση

$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq 0$, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in Z$, $\nu\in N$

$P(0)=\alpha_0$

$P(2)=\alpha_\nu 2^\nu+\alpha_{\nu-1}2^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 2+\alpha_0\in Z$

Τότε $P(2)=\kappa\in Z$ άρα

$$\alpha_0=\kappa-\left(\underbrace{\alpha_\nu 2^\nu+\alpha_{\nu-1}2^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 2}_{\lambda}\right)=\kappa-\lambda\in Z$$

2. Αν για το πολυώνυμο $f(x)=\alpha+\beta x^\nu$, $\nu\in N$. Ισχύει $f(1)=-8$, $f(2)=-1$, $f(4)=55$ να βρείτε την τιμή του ν.

Λύση

$\alpha=-9$, $\beta=1$, $\nu=3$ αφού $\alpha+\beta=-8$, $\alpha+2^\nu\beta=-1$ και $\alpha+4^\nu\beta=55$.

3. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού με σταθερό όρο το 0, τέτοιο ώστε $P(x)-P(x-1)=x(x-1)$. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+\nu(\nu+1)$$

Λύση

i) $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$, $\alpha\neq 0$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$

$P(x)-P(x-1)=x(x-1)\Leftrightarrow$
$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x-\left[\alpha(x-1)^3+\beta(x-1)^2+\gamma(x-1)\right]=x(x-1)$

από ισότητα πολυωνύμων, μετά από πράξεις $\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\beta=0$, $\gamma=-\dfrac{1}{3}x$

Άρα $P(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}x$

i) $P(x)-P(x-1)=x(x-1)$

$x=2 \qquad P(2)-P(1)=1\cdot 2$

$x = 3 \qquad P(3) - P(2) = 3 \cdot 2$

…………………………………………

$x = \nu + 1 \qquad P(\nu + 1) - P(\nu) = \nu \cdot (\nu + 1)$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε τηλεσκοπικό άθροισμα

$P(\nu+1) - P(1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + \nu \cdot (\nu+1) \Rightarrow$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + \nu \cdot (\nu+1) = \frac{1}{3}\nu \cdot (\nu+1)(\nu+2)$

4. Για ένα πολυώνυμο P ισχύει $P(x^2) = P(x^5)$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι είναι σταθερό.

Λύση

$P(x^2) = P(x^5)$ άρα

$B\alpha\theta(P(x^2)) = B\alpha\theta(P(x^5))$ αν $B\alpha\theta P(x) = \nu$

$2\nu = 5\nu \Rightarrow \nu = 0$

Άρα $P(x)$ σταθερά.

5. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in R$ το κλάσμα $\frac{(\alpha+1)x^2 - 4x + \beta - 2}{x^2 + 2x + 3}$ παίρνει την ίδια τιμή για όλα τα $x \in R$.

Λύση

$\frac{(\alpha+1)x^2 - 4x + \beta - 2}{x^2 + 2x + 3} = c, \quad \forall x \in R$

$(\alpha+1)x^2 - 4x + \beta - 2 = cx^2 + 2cx + 3c$

άρα $\alpha + 1 = c$ και $-4 = 2c$ και $\beta - 2 = 3c$

Οπότε $\alpha = -3$, $\beta = -4$.

6. Ένα πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές και μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα ρ. Να αποδειχθεί ότι:

ii) αν ρ άρτιος και κ άρτιος, τότε $f(\kappa)$ άρτιος,

iii) αν ρ περιττός και κ περιττός τότε το $f(\kappa)$ άρτιος.

Λύση

Έστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_\nu\in Z$, $\alpha_\nu\neq 0$, $\nu\in N$ και ρ μια ακέραια ρίζα του, τότε:

i) $f(x)=(x-\rho)\Pi(x)$ οπότε

$f(\kappa)=(\kappa-\rho)\Pi(\kappa)=2\lambda\Pi(\kappa)$, αφού κ, ρ άρτιοι

ii) $f(\kappa)=(\kappa-\rho)\Pi(\kappa)=2\lambda\Pi(\kappa)$, η διαφορά δύο περιττών άρτιος

7. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+x-12}+\frac{x^2+x-12}{x^2-x-12}=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}+\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$$

Λύση

Θέτω $\alpha=\frac{x^2-x-12}{x^2+x-12}$, $\beta=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$

Η αρχή γίνεται:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\beta+\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow(\alpha-\beta)+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)\left[1-\frac{1}{\alpha\beta}\right]=0$$

$$(\alpha-\beta)\frac{(\alpha\beta-1)}{\alpha\beta}=0\Leftrightarrow\alpha=\beta \text{ ή } \alpha\beta=1$$

Οπότε:

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+x-12}=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\neq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2-x-12}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}=1$$

Άρα $x=0$ ή $x=\pm\sqrt{\frac{33}{2}}$.

8. **α)** Να αποδειχθεί ότι η μόνη θετική ρίζα της

$$x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+x^3+\frac{1}{x^3}+...+x^\nu+\frac{1}{x^\nu}=2\nu \quad \text{είναι } x=1$$

β) Να λυθεί $\sqrt[3]{x+4}=1+\sqrt[3]{x-3}$

Λύση

α) Αν $x=1$ η ισότητα είναι αληθής.

Αν $1\neq x>0$ τότε $x+\frac{1}{x}>2$, $x^2+\frac{1}{x^2}>2$,…, $x^\nu+\frac{1}{x^\nu}>2$

οπότε $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\ldots+\left(x^\nu+\frac{1}{x^\nu}\right)>2$

Άρα $x=1$.

β) Πρέπει $x\geq 3$. Τότε $\sqrt[3]{x-3}+1+\left(-\sqrt[3]{x+4}\right)=0$

Αν $\alpha=\sqrt[3]{x-3}$, $\beta=1$, $\gamma=-\sqrt[3]{x+4}$ τότε :

$\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=x-3+1-x-4=-6$

Από ταυτότητα Euler

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

παίρνουμε ότι:

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma\Rightarrow -6=3\cdot 1\cdot\sqrt[3]{x-3}\cdot\left(-\sqrt[3]{x+4}\right)\Rightarrow$

$2=\sqrt[3]{x-3}\cdot\sqrt[3]{x+4}\Rightarrow 8=(x-3)(x+4)\Rightarrow$

$x=-5$ ή $x=4$. Άρα $x=4$.

9. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός ρ. Αν για $\alpha,\beta\in R$ η εξίσωση $x^3-\alpha x+\beta=0$ έχει τρεις πραγματικές λύσεις, εκ των οποίων μία είναι ο ρ, να δειχθεί ότι $\alpha\geq\frac{3\rho^2}{4}$.

Λύση

Από το σχήμα Horner

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -\alpha & \beta & \\
\downarrow & \rho & \rho & \rho^3-\alpha\rho & \rho \\
\hline
1 & \rho & \rho^2-\alpha & \boxed{\rho^3-\alpha\rho+\beta=0} \rightarrow \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi o &
\end{array}$$

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου $(x-\rho)\left(x^2+\rho x+\rho^2-\alpha\right)=0\Rightarrow$

$x=\rho$ ή $x^2+\rho x+\rho^2-\alpha=0$

Η αρχική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές ρίζες, άρα η $x^2+\rho x+\rho^2-\alpha=0$ έχει δύο.

Οπότε $\Delta\geq 0\Leftrightarrow \rho^2-4\left(\rho^2-\alpha\right)\geq 0\Rightarrow \rho^2-4\rho^2+4\alpha\geq 0\Rightarrow 3\rho^2\geq 4\alpha\Rightarrow$

$\alpha<\frac{3\rho^2}{4}$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)$, $x \in R$ με ακέραιους συντελεστές, ώστε να ισχύει $f(1)\cdot f(9)\cdot f(8)=1988$. Να δειχθεί ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της $f(x)=0$, τότε ο ρ δεν είναι ακέραιος.

Λύση

Από την Ευκλείδεια διαίρεση του $f(x)$ με το $x-\rho$, έχουμε

$$f(x)=(x-\rho)\Pi(x),\ \forall x \in R \qquad (1)$$

Για $x=1$, $x=9$, $x=8$ διαδοχικά

$f(1)=(1-\rho)\Pi(1)$, $f(9)=(9-\rho)\Pi(9)$, $f(8)=(8-\rho)\Pi(8)$

$f(1)f(9)f(8)=(1-\rho)(9-\rho)(8-\rho)\Pi(1)\Pi(9)\Pi(8)\Rightarrow$

$$\boxed{(1-\rho)(9-\rho)(8-\rho)\Pi(1)\Pi(9)\Pi(8)=1988} \qquad (2)$$

Κάθε ακέραιος αριθμός που όταν διαιρεθεί με το 3 αφήνει υπόλοιπο 0, 1, 2.

Άρα $\rho=3\kappa$, $\rho=3\kappa+1$, $\rho=3\kappa+2$, $\kappa \in Z$

Αν $\rho=3\kappa$ η (2) $\Rightarrow$ $(1-3\kappa)(9-3\kappa)(8-3\kappa)\Pi(1)\Pi(8)\Pi(9)=1988$

$3\lambda=1988$ άτοπο

Αν $\rho=3\kappa+1$ η (2) $\Rightarrow$ $-3\kappa(8-3\kappa)(7-3\kappa)\Pi(1)\Pi(8)\Pi(9)=1988$

$3\lambda=1988$ άτοπο

Αν $\rho=3\kappa+2$ η (2) $\Rightarrow 3\lambda=1988$ άτοπο.

Άρα ο ρ δεν είναι ακέραιος.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές και ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τους θετικούς κ, λ με $\kappa \neq \lambda$. Να δείξετε ότι $|f(\kappa+\lambda)-(\kappa+\lambda)| \geq \kappa\cdot\lambda$.

Λύση

Το ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο με το $(x-\kappa)(x-\lambda)$ μας δίνει υπόλοιπο $\upsilon(x)=\alpha x+\beta$. Άρα

$$\boxed{f(x)=(x-\kappa)(x-\lambda)\Pi(x)+\alpha x+\beta} \qquad (1)$$

για $x=\kappa$, $x=\lambda$ και δεδομένου ότι $f(\kappa)=\kappa$, $f(\lambda)=\lambda$ έχουμε

$$(\alpha\kappa+\beta=\kappa \quad \alpha\lambda+\beta=\lambda) \quad \overset{\kappa\neq\lambda}{\Leftrightarrow} \quad (\alpha=1,\ \beta=0)$$

Άρα $f(x)=(x-\kappa)(x-\lambda)\Pi(x)+x$

Τότε: $f(\kappa+\lambda)=\kappa\lambda\Pi(\kappa+\lambda)+\kappa+\lambda \Leftrightarrow$

$f(\kappa+\lambda)-(\kappa+\lambda)=\kappa\lambda\Pi(\kappa+\lambda) \Rightarrow$

$|f(\kappa+\lambda)-(\kappa+\lambda)|=|\kappa||\lambda||\Pi(\kappa+\lambda)|=\kappa\lambda\Pi(\kappa+\lambda)$ (2)

Το $\Pi(x)$ είναι πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές άρα $\Pi(\kappa+\lambda)\geq 1$.

Οπότε $|f(\kappa+\lambda)-(\kappa+\lambda)|\geq \kappa\cdot\lambda\cdot 1$

Σημείωση:

Το $\Pi(\kappa+\lambda)=0 \Leftrightarrow f(\kappa+\lambda)=(\kappa+\lambda) \Leftrightarrow (\kappa+\lambda=\kappa \text{ ή } \kappa+\lambda=\lambda) \Leftrightarrow$

$(\lambda=0 \text{ ή } \kappa=0)$ άτοπο.

12. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $P(x^2)=x^2(x^2+1)\cdot P(x)$ και $P(2)=12$ να βρείτε το $P(x)$.

Λύση

$$\boxed{P(x^2)=x^2(x^2+1)\cdot P(x),\ P(2)=12} \quad (1)$$

Έστω ότι το ζητούμενο $P(x)$, έχει βαθμό ν τότε $B\alpha\theta(P(x^2))=2\nu$ και $B\alpha\theta x^2(x^2+1)\cdot P(x)=\nu+4$.

Αφού ισχύει η (1) $2\nu=\nu+4 \Leftrightarrow \nu=4$

Άρα $P(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$ $\alpha\neq 0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in R$

Από (1): $P(-x)=P(x)$ άρα

$\alpha x^4-\beta x^3+\gamma x^2-\delta x+\varepsilon=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$

$\beta x^3+\delta x=0$ για όλα τα x, άρα $\beta=\delta=0$.

$P(x)=\alpha x^4+\gamma x^2+\varepsilon$, $P(2)=12 \Leftrightarrow \boxed{16\alpha+4\gamma+\varepsilon=12}$

Επίσης, $\boxed{P(x^2)=\alpha x^8+\gamma x^4+\varepsilon}$

$x^2(x^2+1)(\alpha x^4+\gamma x^2+\varepsilon)=(x^4+x^2)(\alpha x^4+\gamma x^2+\varepsilon)=$

$\alpha x^8+\gamma x^6+\varepsilon x^4+\alpha x^6+\gamma x^4+\varepsilon x^2$

Άρα $\alpha x^8+(\alpha+\gamma)x^6+(\varepsilon+\gamma)x^4+\varepsilon x^2=\alpha x^8+\gamma x^4+\varepsilon \Rightarrow$

$\alpha=1$ και $\alpha+\gamma=0$ και $\varepsilon+\gamma=\gamma$ και $\varepsilon=0$

$\alpha=1,\ \gamma=-1,\ \varepsilon=0$

Άρα $P(x)=x^4-x^2$.

13. Να λυθεί ως προς $x, y \in R$ η εξίσωση $x^2 + 2x \cdot \sigma\upsilon\nu(x \cdot y) + 1 = 0$

Λύση

$x^2 + 2x \cdot \sigma\upsilon\nu(x \cdot y) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 2x \cdot \sigma\upsilon\nu(x \cdot y) + \eta\mu^2 xy + \sigma\upsilon\nu^2 xy = 0 \Leftrightarrow$

$(x + \sigma\upsilon\nu(xy))^2 + \eta\mu^2 xy = 0 \Leftrightarrow$

$x + \sigma\upsilon\nu(xy) = 0$ και $\eta\mu(xy) = 0$

$x + \sigma\upsilon\nu(xy) = 0$ και $xy = \kappa\pi$, $\kappa \in Z$

Άρα $x + \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi) = 0$ και $xy = \kappa\pi$

$\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi) = -x$ και $xy = \kappa\pi$

- Αν $\kappa = 2\rho$, $\rho \in Z$ άρα

  $\sigma\upsilon\nu 2\rho\pi = -x$ και $xy = 2\rho\pi$

  $x = -1$ και $y = -2\rho\pi$, $\rho \in Z$

- Αν $\kappa = (2\rho + 1)$, $\rho \in Z$

  $x = 1$ και $y = (2\rho + 1)\pi$, $\rho \in Z$.

14. Δίνεται ένα πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές. Αν για τους διαφορετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = P(\delta) = 5$ να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει $\lambda \in Z$ τέτοιος ώστε $P(\lambda) = 8$.

Λύση

Η διαίρεση του $P(x)$ με $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\Pi(x) + \upsilon$

Αφού $P(\alpha) = 5 \Rightarrow \upsilon = 5$. Οπότε:

$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\Pi(x) + 5$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\lambda \in Z$:

$P(\lambda) = 8 \Leftrightarrow (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)\Pi(\lambda) + 5 = 8 \Leftrightarrow$

$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)\Pi(\lambda) = 3$

Η τελευταία είναι αδύνατη γιατί οι $\lambda-\alpha$, $\lambda-\beta$, $\lambda-\gamma$, $\lambda-\delta$ είναι διαφορετικοί ακέραιοι και το 3 δεν γράφεται ως γινόμενο 4 ακεραίων.

15. Δίνεται $P(x)=(x^2-4x+4)^{2010}+(x^2-5x+5)^{2011}$.

i) Να βρείτε τον σταθερό όρο

ii) Να βρείτε το άθροισμα συντελεστών του

iii) Να αποδείξετε ότι $P(3)=0$

iv) Να αποδείξετε ότι ο $9^{2010}+11^{2011}$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

Λύση

i) $P(0)=4^{2010}+5^{2011}=\alpha_0$

ii) $P(1)=(1-4+4)^{2010}+(1-5+5)^{2011}=2$

iii) $P(3)=(3^2-4\cdot 3+4)^{2010}+(3^2-5\cdot 3+5)^{2011}=1^{2010}+(-1)^{2011}=0$

Το 3 ρίζα άρα το $(x-3)$ παράγοντας.

iv) Για $x=-1$

$P(x)=(x-3)Q(x)=(x^2-4x+4)^{2010}+(x^2-5x+5)^{2011}$

$-4Q(-1)=9^{2010}+11^{2011}$ άρα ο $4|9^{2010}+11^{2011}$.