ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Θεώρημα Cauchy – Απόδειξη του κανόνα De L' Hospital

Θεώρημα Cauchy $$\lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (1)$$

Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$.

Απόδειξη

Έστω $g(x)=\big(g(\beta)-g(\alpha)\big)f(x)-\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)g(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=\big(g(\beta)-g(\alpha)\big)f'(x)-\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)g'(x)$ και $h(\alpha)=h(\beta)$. Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $h'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα Cauchy $\forall\xi\in(x,\beta)$:

$$\frac{f(\beta)-f(x)}{g(\beta)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\overset{f(\beta)=g(\beta)}{\Rightarrow}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Αν $x\to\beta^-\Rightarrow\xi\to\beta^-$ οπότε $\displaystyle\lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\beta^-}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to\beta^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

β΄ τρόπος

Από ανάπτυγμα Taylor :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(\nu)}(x_0)\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}}{g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+g''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+g^{(\nu)}(x_0)\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\left[f'(x_0)+f''(x_0)\frac{x-x_0}{2}+\ldots+f^{(\nu)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{\nu-1}}{\nu}\right]}{(x-x_0)\left[g'(x_0)+g''(x_0)\frac{x-x_0}{2}+\ldots+g^{(\nu)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{\nu-1}}{\nu}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αν

i) $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$

ii) Αν η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$.

Απόδειξη

i) Αν $f(x)\geq 0$ τότε :

$$f(\xi_\kappa)\Delta x\geq 0\Rightarrow \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\geq 0\Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\geq 0\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$$

ii) Αν η f δεν είναι παντού μηδέν. τότε υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ με $f(x_0)>0\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)>0$, υπάρχει $\delta>0$ και οσοδήποτε μικρό ώστε $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx+\int_{\beta}^{\delta} f(x)dx>0$

αφού $\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx>0$.

Παρατήρηση

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι στο άθροισμα $\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ ένας τουλάχιστον όρος είναι θετικός και οι υπόλοιποι μη μηδενικοί, άρα αυτό είναι θετικό.

Πρόταση

Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι αντιστρέψιμες με $f: A \to R$, $g: B \to R$ και ορίζεται η gof, τότε και η gof είναι αντιστρέψιμη με $\boxed{(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}}$

Απόδειξη

Η gof έχει πεδίο ορισμού $D_{gof} = \{x \in A / f(x) \in B\} \neq \varnothing$, $D_{gof} = \Gamma$

Έστω $x_1, x_2 \in D_{gof}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (gof)(x_1) \neq (gof)(x_2)$ άρα gof είναι "1−1".

Η συνάρτηση $(gof)^{-1}$ έχει πεδίο ορισμού $(gof)(\Gamma) = g(f(\Gamma))$

$D_{f^{-1}og^{-1}} = \left\{\alpha \in D_{g^{-1}} / g^{-1}(\alpha) \in D_{f^{-1}}\right\} = \left\{\alpha \in g(B) / g^{-1}(\alpha) \in f(A)\right\}$ υπάρχει $\beta \in g(\beta)$:

$g(\beta) = \alpha$. Άρα :

$D_{f^{-1}og^{-1}} = \left\{{}^{\alpha\in R}\beta \in f(A) \text{ και } g(\beta) = \alpha \text{ και } \beta \in B\right\}$

$= \left\{{}^{\alpha\in R}\beta \in (B \cap f(A)) \text{ και } g(\beta) = \alpha\right\}$

$= \left\{{}^{\alpha\in R} g(\beta) = \alpha \text{ και } \exists x \in A \text{ και } f(x) = \beta\right\}$

Άρα $\alpha \in (gof)(\Gamma) = g(f(\Gamma))$

Οπότε $D_{f^{-1}og^{-1}} = D_{(gof)^{-1}} = \Delta$

Έστω $z \in \Delta$ τότε

$(gof)^{-1}(z) = x \Leftrightarrow (gof)(x) = z \Leftrightarrow g(f(x)) = z \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(z) \Leftrightarrow$

$x = f^{-1}(g^{-1}(z)) \Leftrightarrow x = (f^{-1}og^{-1})(z)$

Άρα $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

β΄ τρόπος

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η αντίστροφη μιας f είναι μοναδική.

Έστω ότι υπάρχει $g: (fog)(x) = x$

Επίσης, $(fof^{-1})(x) = x$. Άρα

$(fog)(x) = (fof^{-1})(x) \Rightarrow f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) \overset{"1-1"}{\Leftrightarrow} g(x) = f^{-1}(x)$

Θέλουμε να αποδείξουμε: $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

Πράγματι

$$(fog)o\left(g^{-1}of^{-1}\right)=\left((fog)og^{-1}\right)of^{-1}=\left[\left(fo\left(gog^{-1}\right)of^{-1}\right)\right]=(foI)of^{-1}=fof^{-1}=I$$