ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ Ε.Μ.Ε.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

1995-1996

1. Η εξίσωση (Ε): $\kappa(x-2)+3\lambda=5x+2$ αληθεύει για κάθε πραγματικό x.
Να δειχτεί ότι η εξίσωση (Ε'): $\kappa(\lambda-4)x+2\lambda=\kappa$ είναι αδύνατη.

2. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια ακεραίων x, y που ικανοποιούν την εξίσωση (Ε): $x^2=y^2+2y+9$.

3. Έστω Μ σημείο στη πλευρά ΑΒ ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Ισχύουν:
1) ΑΜ=5,1cm, και ΑΜ>ΜΒ. **2)** Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 47,6cm.
3) Το άθροισμα των περιμέτρων του τετραπλεύρου ΑΜΓΔ και του τριγώνου ΜΒΓ είναι 74,79cm.
Να εξετάσετε αν όλα τα παραπάνω είναι αληθινά.

4. Σε μια σκακιέρα 6x6 θέλουμε να τοποθετήσουμε πιόνια, ώστε:
• δύο πιόνια να μη βρίσκονται σε γειτονικά τετραγωνάκια (δηλ. τετραγωνάκια με κοινή πλευρά), και επιπλέον
• σε κάθε τετραγωνάκι είτε να υπάρχει πιόνι είτε να είναι γειτονικό με ένα τετραγωνάκι με πιόνι.
Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο και τον μέγιστο αριθμό από πιόνια που μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σκακιέρα, ώστε να ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

1996-1997

1. Έστω οι αριθμοί α, β με $\alpha^2-4\alpha+\beta^2+10\beta+20=0$ (1).
Να δειχτεί ότι α>β.

2. Έστω κύκλος διαμέτρου ΑΒ και σημείο Γ εξωτερικό του κύκλου. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Γ στρέφεται ώστε να μη διέρχεται από σημείο εσωτερικό του ΑΒ.
Έστω Α', Β' οι προβολές των Α, Β επί της (ε).
Να βρεθεί η θέση της (ε) ώστε το άθροισμα ΑΑ'+ΒΒ' να είναι μέγιστο.

3. Να δειχτεί ότι η εξίσωση (Ε): $x^2-4x-19^{96}-96^{19}-2000=0$ δεν έχει ακέραια λύση.

4. Έστω οι αριθμοί α, β, γ, δ τοποθετημένοι στις θέσεις: $\begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \\ \hline \end{array}$.

Κάνουμε την παρακάτω κίνηση:
Είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής,
είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας

στήλης.

Να δειχτεί ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$ (όλα μηδέν)

<u>αν και μόνο αν</u> α+δ=β+γ.

1997-1998

1. Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου.

Να δειχτεί ότι $2<\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}-\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}\leq 3$.

2. Στο εσωτερικό της γωνίας $x\hat{O}y=90^o$ θεωρούμε το σημείο Γ και στις πλευρές της Οx, Oy τα Α, Β αντίστοιχα.
Να δειχτεί ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2(ΟΓ).

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=108^o$ και ΓΔ η διχοτόμος του. Φέρνουμε τη κάθετη στη ΓΔ στο Δ, που τέμνει τη ΒΓ στο Ε.
Να δειχτεί ότι ΒΕ=ΑΔ.

4. Έστω $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να δειχτεί ότι οι αριθμοί $\nu(\nu-1)$ και $(\nu+1)^2$ έχουν διαφορετικό άθροισμα ψηφίων.

1998-1999

1. Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in Q_+^*$ με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\alpha\beta\gamma$ (1)

Να δειχτεί ότι ο αριθμός **Α**$=(\alpha^2\beta^2+1)(\beta^2\gamma^2+1)(\gamma^2\alpha^2+1)$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

2. Έστω κύκλος (Ο,2) και τετράγωνο ΟΑΒΓ. Το τετράγωνο και ο κύκλος έχουν κοινό μέρος εμβαδού ίσο με τα $\frac{3}{5}$ του εμβαδού του τετραγώνου.

Να υπολογιστεί η πλευρά του τετραγώνου.

3. Να εξεταστεί αν υπάρχουν 4 διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί ώστε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτούς να είναι δύναμη του 5.

4. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε σημεία των ΑΒ, ΑΓ.
Να δειχτεί ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΕ, ΓΔ αποτελούν πλευρές τριγώνου.

1999-2000

1. Δύο αμβλείες γωνίες είναι τοποθετημένες έτσι, ώστε το ένα ζεύγος των πλευρών τους να είναι αντικείμενες ημιευθείες, ενώ το άλλο ζεύγος είναι κάθετες ημιευθείες.
Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών.

2. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν: $x-yz=y-zx=z-xy$.
Να δειχτεί ότι: $(x-y)(y-z)(z-x)=0$.

3. Έστω $\alpha,x,y\in \mathrm{P}$ με $\alpha\geq 2$, $1\leq x\leq \alpha$ και $1\leq y\leq \alpha$.

Να δειχτεί ότι: $4\leq (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\leq \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$.

4. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α, β που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(E):\ \alpha^5\beta^2+100\alpha^3=200.$$

2000-2001

1. Αν α και x πραγματικοί με $\alpha\geq 0$, να δειχτεί ότι $\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha-1}}\geq 2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Θεωρούμε 100 αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ από τους οποίους οι 40 είναι ίσοι με 1 και οι 60 με 2 και τους τοποθετούμε πάνω σε ένα κύκλο έτσι, ώστε να μην υπάρχουν τρεις ίσοι αριθμοί σε διαδοχικές θέσεις. Σχηματίζονται έτσι 100 τριάδες T_i, $i=1, 2, \ldots, 100$, αριθμών σε διαδοχικές θέσεις πάνω στον κύκλο. Έστω P_i είναι το γινόμενο και S_i είναι το άθροισμα των τριών αριθμών της τριάδας T_i, $i=1, 2, \ldots, 100$.

Να δειχτεί ότι:
1) $P_i=2S_i-6$, για κάθε $i=1, 2, \ldots, 100$.
2) $P_1+P_2+P_3+\ldots+P_{100}=360$.

3. **α)** Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση x^4+4y^4.
β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $y\geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός x^4+4y^4 είναι σύνθετος.

4. Θεωρούμε τις κάθετες ημιευθείες Ot, Os, το σημείο Α της Ot με ΟΑ=x και το σημείο Β της Os με ΟΒ=y και y<x. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ μέσα στη γωνία $t\hat{O}s$. Από την κορυφή Δ φέρουμε ευθεία ε κάθετη στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $t\hat{O}s$ η οποία τέμνει την Os στο Ε και την Ot στο Ζ.

Να δειχτεί ότι:
1) ΑΖ=x+y και ΒΕ=2x.
2) Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

2001-2002

1. Τριψήφιος αριθμός είναι μεγαλύτερος του 610, μικρότερος του 650 και διαιρούμενος με το 7 δίνει υπόλοιπο 3.
Να βρεθεί ο αριθμός, αν είναι γνωστό ότι είναι πολλαπλάσιο του 5**.**

2. Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A=(1+\alpha-\alpha^2+\alpha^3)^2+\alpha^3$**.**

3. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) με ΑΒ>ΑΓ. Από το μέσον Μ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα $\Delta\overset{\Delta}{M}B=\Delta\overset{\Delta}{A}\Gamma$.
Να βρεθούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ**.**

4. Έστω $A=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-6x+1}}$, $B=\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+1}}$.
Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες η αριθμητική τιμή της παράστασης $\Pi=\dfrac{2A+B}{3}$ είναι ακέραιος αριθμός**.**

2002-2003

1. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση (Ε): $\dfrac{3\alpha+1}{\alpha+x}-\dfrac{\alpha-1}{\alpha-x}=\dfrac{2\alpha(\alpha^2-1)}{x^2-\alpha^2}$, $\alpha\in P$.
Για ποιες θετικές ακέραιες τιμές του α οι ρίζες της (Ε) είναι αριθμοί πρώτοι**;**

2. **1)** Έστω α είναι πραγματική παράμετρος και ισχύει

$$\frac{2\alpha}{x^2-\alpha^2}=\frac{A}{x-\alpha}-\frac{B}{x+\alpha},\ \text{για κάθε } x\in P-\{-\alpha,\ \alpha\}.$$

Να βρείτε τους αριθμούς Α και Β**.**
2) Αν $x\neq\mu$, όπου $\mu\in\{-10, -9, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 9, 10\}$, να δειχτεί ότι:

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-6}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\ldots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right].$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=120^o$. Οι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι διχοτόμοι των γωνιών του.
Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{E}Z$**.**

4. Αν x,y,z>0 να δειχτεί ότι $\dfrac{1}{x^3+y^3+xyz}+\dfrac{1}{y^3+z^3+xyz}+\dfrac{1}{z^3+x^3+xyz}\leq\dfrac{1}{xyz}$**.**

2003-2004

1. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, x, w.
Αν αντικαταστήσουμε τους x, y, z, w με τους αριθμούς

$x_1=x+10,\ \ y_1=y+10,\ \ z_1=z+10,\ \ w_1=w+10,$

το άθροισμα $x_1+y_1+z_1+w_1=1040$.
Αν αντικαταστήσουμε τους x, y, z, w με τους αριθμούς

$x_2=10-x,\ \ y_2=20-y,\ \ z_2=30-z,\ \ w_2=40-w,$

πόσο θα το άθροισμα των $x_2+y_2+z_2+w_2$**;**

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός v^2+5v+5, δεν είναι τέλειο τετράγωνο για οποιοδήποτε $v\in\mathbb{N}$**.**

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Γράφουμε τον κύκλο (Α,α).

Από τυχαίο σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{B\Delta}$ που βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο φέρουμε κάθετη προς την ακτίνα ΑΜ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Ε και την ΓΔ στο Ζ.

Να δειχτεί ότι: **1)** ΕΖ=ΒΕ+ΔΖ**.** **2)** $\frac{\alpha}{2}<EZ<\alpha$**.**

4. Οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι με $\mu\leq 6008$.

Να προσδιορίσετε τη μικρότερη δυνατή θετική τιμή του αριθμού $A=3-\frac{\mu}{\nu}$**.**

2004-2005

1. Ένας μαθητής θέλει να αγοράσει δύο βιβλία. Το βιβλίο Α κοστίζει το 60% των χρημάτων που έχει μαζί του, ενώ το βιβλίο Β κοστίζει το 44% των χρημάτων που έχει μαζί του.
Αν είχε 0,80€ χρήματα περισσότερα, τότε θα είχε ακριβώς τα χρήματα που κοστίζουν και τα δύο βιβλία μαζί.
Να βρείτε πόσα χρήματα κοστίζει κάθε ένα από τα δύο βιβλία**.**

2. Έστω β και γ είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα α.
Να δειχτεί ότι $\beta^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^4\geq\frac{3}{4}\alpha^4$**.**

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΔ το ύψος του. Στα σημεία Β και Γ φέρνουμε κάθετα τμήματα ΒΕ και ΓΖ προς τη ΒΓ, τέτοια ώστε $BE=\Gamma Z=\frac{1}{2}A\Delta$ και τα Ε, Ζ να βρίσκονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο από το Α ως προς τη ΒΓ.
1) Να δειχτεί ότι ΑΕ=ΑΖ**.**
2) Αν είναι $E(AB\Gamma)=\kappa^2$, να προσδιορίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΕΖ και ΑΚΛ, όπου Κ, Λ είναι τα σημεία τομής των ΑΕ και ΑΖ με τη ΒΓ, αντίστοιχα**.**

4. Έστω $A=2(\lambda^2+\mu^2)-(\lambda+\mu)^2-4$ και $B=\lambda^2-\lambda\mu+\lambda+\mu-2$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
Να λύσετε την εξίσωση (Ε): Αx=Β, ως προς x, για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ.

2005-2006

1. Έστω ότι οι ακέραιοι α και α+2 είναι πρώτοι με α>3.
Να δειχτεί ότι ο αριθμός α+4 είναι σύνθετος.

2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει α+β=λ.
Να δειχτεί ότι $\frac{4}{3\lambda}\le\frac{1}{\alpha+\lambda}+\frac{1}{\beta+\lambda}<\frac{3}{2\lambda}$.

3. Δίνεται σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;

4. Έστω Α και Β δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο Σ={1, 2, 3, 4, 5}.
Να αποδειχτεί ότι ένα τουλάχιστον από τα Α και Β περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

2006-2007

1. Δίνονται $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$ με α<β<γ<δ<ε και η παράσταση

$$K=\frac{\alpha\cdot|\delta-\gamma|+\alpha\cdot|\delta-\varepsilon|+\varepsilon\cdot|\beta-\alpha|+\varepsilon\cdot|\beta-\gamma|}{|\beta-\alpha|+|\beta-\gamma|+|\delta-\gamma|+|\delta-\varepsilon|}.$$

α) Να δειχτεί ότι β<Κ<δ.
β) Αν είναι x=(α+β)(γ+δ), y=(α+γ)(β+δ), z=(α+δ)(β+γ), να συγκρίνετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $M\hat{B}\Gamma=M\hat{\Gamma}B$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $M\hat{A}\Delta=M\hat{A}E$.
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι α,β>0 και $\alpha^3+\beta^2\le 64$, να αποδείξετε ότι $\alpha^4+\beta^3<512$.

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ.
Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50.000€**;**

2007-2008

1. Α. Να απλοποιήσετε την παράσταση $K=(x+y)^3-(x-y)^3-6x^2y-y^3$**.**
Β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=200.004^3-199.996^3-24\cdot 200.000^2-64$ είναι κύβος ακεραίου**.**

2. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha=2\beta+\alpha\beta-4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης (Ε): $(2x-\alpha)^3-(x-\beta)^3-x^3=0$**.**

3. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ=2α και ΑΔ=α.
Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:
''το άθροισμα ΔΜ+ΜΓ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ''**.**

4. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x>0$, $y+1>0$, $z+2>0$ και $x+y+z=3$,
να αποδείξετε ότι $\dfrac{x(y+1)}{x+y+1}+\dfrac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\dfrac{x(z+2)}{x+z+2}\leq 3$.
Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα**;**