ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
Μαθηματικός

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΕΡΗ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

ΠΙΝΑΚΑΣ

α \ α	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	ΥΠΟ ΜΟΡΦΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ
1	$\int P(x)e^{\kappa x}dx,\ \ P(x)$ πολυώνυμο	$e^{\kappa x} = \left(\dfrac{e^{\kappa x}}{\kappa}\right)'$
2	$\int P(x)\eta\mu\lambda x dx$	$\eta\mu\lambda x = \left(-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\lambda x}{\lambda}\right)'$
3	$\int P(x)\sigma\upsilon\nu\lambda x dx$	$\sigma\upsilon\nu\lambda x = \left(\dfrac{\eta\mu\lambda x}{\lambda}\right)'$
4	$\int P(x)\ln g(x)dx$	$P(x)$ το πολυώνυμο
5	ΚΥΚΛΙΚΑ $I = \int e^{\lambda x}\sigma\upsilon\nu\kappa x dx$ $I = \int e^{\lambda x}\eta\mu\lambda x dx$	Εφαρμόζουμε 2 φορές την παραγοντική ολοκλήρωση, γράφοντας κατά προτίμηση υπό μορφή παραγώγου την εκθετική και φτιάχνουμε εξίσωση με άγνωστο το ολοκλήρωμα I.
6	$\int \varepsilon\phi^{\nu} x dx$, $\int \sigma\phi^{\nu} x dx$ $\int \eta\mu^{\nu} x dx$, $\int \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$	Υπολογίζονται από αναδρομικές σχέσεις για μεγάλο ν.

- $I_{\nu} = \int \varepsilon\phi^{\nu} x dx = \dfrac{1}{\nu - 1}\varepsilon\phi^{\nu-1}x - I_{\nu-2},\ \nu \geq 2$
- $I_{\nu} = \int \eta\mu^{\nu} x dx = \dfrac{\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \dfrac{\nu - 1}{\nu} I_{\nu-2}$

Η μέθοδος της παραγοντικής ολοκλήρωσης, περιγράφεται και με τον παρακάτω πίνακα.

Π.χ. $\mathrm{I} = \int x^3 \sigma\upsilon\nu x dx$

x^3	$\sigma\upsilon\nu x$
$3x^2$	$\eta\mu x$
$6x$	$-\sigma\upsilon\nu x$
6	$-\eta\mu x$
	$\sigma\upsilon\nu x$

Το $I = +\left(x^3\right)\eta\mu x - 3x^2\left(-\sigma\upsilon\nu x\right) + 6x\left(-\eta\mu x\right) - 6\sigma\upsilon\nu x + c$

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
Μαθηματικός

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

α α	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
1	$I=\int f\left(x,\sqrt[\nu_1]{\phi(x)},\sqrt[\nu_2]{\phi(x)},...\sqrt[\nu_\kappa]{\phi(x)}\right)$	$\sqrt[\nu]{\phi(x)}=t$, $\nu=$ Ε.Κ.Π.$(\nu_1,\nu_2,...,\nu_\kappa)$ $\phi(x)dx=\nu t^{\nu-1}\cdot dt$
2	$I=\int\frac{1}{(x-\rho)^{\nu}}dx,\ \nu\in\mathbb{N}$	$x-\rho=u,\quad dx=du$
3	$I=\int f\left(x,\sqrt{\rho^2-x^2}\right)dx$	$x=\rho\eta\mu t\ ,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $dx=\rho\sigma\upsilon\nu t$
4	$I=\int f\left(x,\sqrt{x^2-\rho^2}\right)dx$	$x=\frac{\rho}{\sigma\upsilon\nu t},\ dx=\frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$ $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
5	$I=\int f\left(x,\sqrt{x^2+\rho^2}\right)dx$	$x=\rho\cdot\varepsilon\phi t\ ,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
6	$I=\int f\left(x,\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}\right)dx$ Μετ/μοί Fuler $\rightarrow$	$\alpha>0:\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}=t\pm x\sqrt{a}$ $\alpha<0$ και $c>0:\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}=t\cdot x\pm x\sqrt{c}$ $\alpha<0$ και $\Delta>0:\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}=t\cdot(x-x_0)$ x_0 ρίζα
7	$I=\int f\left(x,\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x\right)dx$ $I=\int\eta\mu^{\kappa}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}xdx,\ \kappa,\lambda\in\mathbb{N}$ π.χ. $I=\int\frac{1+\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$ $I=\int\eta\mu^3x\cdot\sigma\upsilon\nu^2xdx$	i) Περιττή ως προς $\eta\mu x$, θέτω $\sigma\upsilon\nu x=t$ (κ περιττός) ii) Περιττή ως προς $\sigma\upsilon\nu x$, θέτω $\eta\mu x=t$ (λ περιττός) iii) Η f άρτια: θέτουμε $\varepsilon\phi x=t$ $\qquad\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1}{1+\varepsilon\phi^2x}$ $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ $\qquad\eta\mu^2x=\frac{\varepsilon\phi^2x}{1+\varepsilon\phi^2x}$

		iv) Αν δεν ισχύει καμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις $t = \varepsilon\phi\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\eta\mu x = \frac{2t}{1+t^2}$
8	$\int \eta\mu^{\nu} x dx,\ \ \nu \in \mathbb{N}$	$\nu = 2\kappa+1$: θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = t$ $\nu = 2\kappa : \eta\mu^{2\kappa} = \left(\eta\mu^2 x\right)^{\kappa} = \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^{\kappa}$
9	$\int \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx,\ \ \nu \in \mathbb{N}$	$\nu = 2\kappa+1$: θέτουμε $\eta\mu x = t$ $\nu = 2\kappa : \sigma\upsilon\nu^{2\kappa} x = (\sigma\upsilon\nu^2 x)^{\kappa} = \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^{\kappa}$
10	$\int \frac{1}{\eta\mu^{\kappa} x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\lambda} x} dx$	Γράφουμε $1 = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ και κάνουμε διάσπαση σε 2 κλάσματα
11	$\int \eta\mu\kappa x \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x dx$ $\int \sigma\upsilon\nu\lambda x \cdot \sigma\upsilon\nu\kappa x dx$ $\int \eta\mu\kappa x \cdot \eta\mu\lambda x dx$	Κάνουμε χρήση $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta)$ $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ $2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$
12	$\int \frac{\eta\mu^{\kappa} x}{\sigma\upsilon\nu^{\lambda} x} dx$ $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^{\lambda} x}{\eta\mu^{\kappa} x} dx$	Προσπαθούμε να γράψουμε τον αριθμητή ως τριγωνομετρική παράσταση του παρονομαστή

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
Μαθηματικός

ΕΠΙΣΗΣ ΙΣΧΎΟΥΝ

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \tau o\xi\eta\mu\chi + c = -\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\chi + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tau o\xi\varepsilon\phi\chi + c = -\tau o\xi\sigma\phi\chi + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \tau o\xi\,\frac{\chi}{\alpha} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tau o\xi\varepsilon\phi(\frac{\chi}{\alpha}) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$$