ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ Ε.Μ.Ε.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

1993-1994

1. Για α,γ,δ$\in\mathbb{Z}^*$ ορίζουμε $\alpha\Diamond\beta\Diamond\gamma=\alpha^{\beta}-\beta^{\gamma}+\gamma^{\alpha}$. Το $1\Diamond-1\Diamond2=$

α) –1, **β)** –2, **γ)** 0, **δ)** 2, **ε)** 4.

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=55^o$, $\hat{\Gamma}=75^o$ και Δ, Ε σημεία των ΑΒ, ΒΓ ώστε ΒΔ=ΒΕ.

Η γωνία $B\hat{E}\Delta$=

α) 50^o, **β)** 55^o, **γ)** 60^o, **δ)** 65^o, **ε)** 70^o.

3. $A=\dfrac{15^{30}}{45^{15}}=$

α) $(\frac{1}{3})^{15}$, **β)** $(\frac{1}{3})^{2}$, **γ)** 1, **δ)** 3^{15}, **ε)** 5^{15}.

4. Για x,y$\in\mathbb{R}$ ορίζουμε $x\Diamond y=4x-3y+xy$.

Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση (Ε): $3\Diamond y=12$;

α) 0, **β)** 1, **γ)** 3, **δ)** 4, **ε)** πάνω από 4.

5. Πέρυσι μια μοτοσικλέτα κόστιζε 160.000 και το κράνος 40.000 δρχ. Φέτος το κόστος της μοτοσικλέτας αυξήθηκε κατά 5% και το κόστος του κράνους κατά 10%.

Κατά πόσο % αυξήθηκε το συνολικό κόστος μοτοσικλέτας και κράνους;

α) 5%, **β)** 7%, **γ)** 7,5%, **δ)** 8%, **ε)** 15% .

6. $A=\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}=$

α) $\sqrt{2}$, **β)** 16, **γ)** 32, **δ)** $12^{\frac{2}{3}}$, **ε)** 512,5.

7. Στο σύστημα με βάση το 10 έστω A_{κ} ο θετικός ακέραιος ο οποίος έχει κ μονάδες στη παράσταση του. ($A_1=1$, $A_3=111$,)

Έστω $B=\dfrac{A_{24}}{A_4}$, όπου ο Β είναι ακέραιος του οποίου τα ψηφία είναι μόνο μηδενικά και μονάδες.

Ο αριθμός των μηδενικών στο Β είναι

α) 10, **β)** 11, **γ)** 12, **δ)** 13, **ε)** 15.

8. Έστω (C_1), (C_2) δύο διαφορετικοί κύκλοι ακτίνας 1 που εφάπτονται.

Πόσοι κύκλοι ακτίνας 3 εφάπτονται ταυτοχρόνως στον (C_1) και (C_2);

α) 2, **β)** 4, **γ)** 5, **δ)** 6, **ε)** 8.

9. Μια χώρα Α έχει γ% του πληθυσμού του κόσμου και δ% του πλούτου του κόσμου. Μια άλλη χώρα Β έχει ε% του πληθυσμού και ζ% του πλούτου του κόσμου. Οι πολίτες των χωρών Α, Β συμμετέχουν ισομερώς στον πλούτο της χώρας τους.

Ο λόγος του πλούτου ενός πολίτη της χώρας Α προς τον πλούτου ενός πολίτη της χώρας Β είναι

α) $\frac{\gamma\delta}{\varepsilon\zeta}$, **β)** $\frac{\gamma\varepsilon}{\delta\zeta}$, **γ)** $\frac{\gamma\zeta}{\delta\varepsilon}$, **δ)** $\frac{\delta\varepsilon}{\gamma\zeta}$, **ε)** $\frac{\delta\zeta}{\gamma\varepsilon}$.

10. Έστω ρ ο αριθμός που προκύπτει όταν η βάση και ο εκθέτης της δύναμης α^{β} τριπλασιαστούν (α,β>0).
Αν ο ρ ισούται με το γινόμενο των α^{β} και x^{β}, x>0, τότε x=

α) 3, **β)** $3\alpha^2$, **γ)** $27\alpha^2$, **δ)** $2\alpha^{3\beta}$, **ε)** $3\alpha^{2\beta}$.

11. Αν $\log_2\{\log_2[\log_2 x]\}=2$, τότε πόσα ψηφία έχει ο x;

α) 5, **β)** 6, **γ)** 7, **δ)** 8, **ε)** 9.

12. Για x>0 ορίζουμε $f(2x)=\frac{2}{2+x}$. Τότε 2f(x)=

α) $\frac{2}{1+x}$, **β)** $\frac{2}{2+x}$, **γ)** $\frac{4}{1+x}$, **δ)** $\frac{4}{2+x}$, **ε)** $\frac{8}{4+x}$.

13. Ένα τετράγωνο με περίμετρο 20 εγγράφεται σ΄ ένα τετράγωνο με περίμετρο 28.
Η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ μιας κορυφής του εσωτερικού τετραγώνου από μια κορυφή του εξωτερικού τετραγώνου είναι

α) $\sqrt{58}$, **β)** $\frac{7\sqrt{5}}{2}$, **γ)** 8, **δ)** $\sqrt{65}$, **ε)** $5\sqrt{3}$.

14. Έστω κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με $\hat{A}=\hat{B}=120^{o}$, ΑΕ=ΑΒ=ΒΓ=2, ΓΔ=ΔΕ=4.
Το (ΑΒΓΔΕ)=

α) 10, **β)** $7\sqrt{3}$, **γ)** 15, **δ)** $9\sqrt{3}$, **ε)** $12\sqrt{5}$.

15. Για πόσες τιμές του ν θα έχει ένα κανονικό ν-γωνο εσωτερικές γωνίες των οποίων το μέτρο σε μοίρες θα είναι ακέραιος αριθμός;

α) 16, **β)** 18, **γ)** 20, **δ)** 22, **ε)** 24.

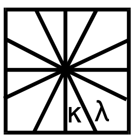
16. Θεωρούμε την αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,...

στην οποία ο ν-οστός φυσικός επαναλαμβάνεται ω φορές.
Αν διαιρέσουμε τον 1993-στό όρο της ακολουθίας αυτής δια του 5, το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι

α) 0, **β)** 1, **γ)** 2, **δ)** 3, **ε)** 4.

17. Θεωρούμε τη διαίρεση του τετραγώνου σε 12 τμήματα



(8 τρίγωνα και 4 τετράπλευρα) όπως στο σχήμα,
Όλες οι γωνίες που έχουν κορυφή στο κέντρο του τετραγώνου είναι ίσες.
Έστω κ το εμβαδόν ενός από τα οκτώ τρίγωνα και λ το εμβαδόν ενός από τα τέσσερα τετράπλευρα.
Ο λόγος $\frac{\lambda}{\kappa}=$

α) $2\sqrt{3}-2$, **β)** $\frac{3}{2}$, **γ)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, **δ)** $\sqrt{3}$, **ε)** 2.

18. Ο Γιάννης και η Μαρία αρχίζουν δουλειά την ίδια μέρα.
Ο Γιάννης δουλεύει 3 μέρες και την τέταρτη έχει ρεπό.
Η Μαρία δουλεύει 7 μέρες και έπειτα έχει 3 μέρες ρεπό.

Το πρόγραμμα εργασίας επαναλαμβάνεται.
Πόσες μέρες θα έχουν και οι δύο μαζί ρεπό, κατά τις πρώτες 1.000 μέρες;

α) 48, **β)** 50, **γ)** 72, **δ)** 75, **ε)** 100.

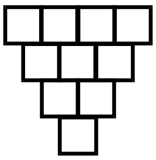
19. Θεωρούμε την εξίσωση (Ε): $10z^2-3iz-\kappa=0$, $z\in\mathbb{C}$.
Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

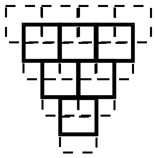
α) Για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}_+^*$, και οι δύο ρίζες της (Ε) είναι καθαρά φανταστικές.
β) Για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}_-^*$, και οι δύο ρίζες της (Ε) είναι καθαρά φανταστικές.
γ) Για κάθε $\kappa\in\mathbf{I}$, και οι δύο ρίζες της (Ε) είναι πραγματικές και ρητές.
δ) Για κάθε $\kappa\in\mathbf{I}$, και οι δύο ρίζες της (Ε) είναι πραγματικές και άρρητές.
ε) Για κάθε $\kappa\in\mathbb{C}$, καμιά ρίζα της (Ε) δεν είναι πραγματική.

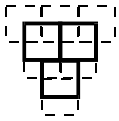
20. Έστω (α_ν) Α.Π. με $\alpha_4+\alpha_7+\alpha_{10}=17$ (1) και $\Sigma_{14}-\Sigma_3=77$ (2).
Αν $\alpha_\kappa=13$, τότε κ=

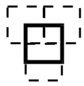
α) 16, **β)** 18, **γ)** 20, **δ)** 22, **ε)** 24.

21. Είκοσι κύβοι τοποθετούνται ως εξής:
α) Οι πρώτοι 10 σε ισόπλευρο τρίγωνο που έχει κάτοψη το σχήμα 1.
β) Πάνω σε αυτούς τοποθετούμε 6 κύβους με κάτοψη το σχήμα 2.
γ) Μετά τους άλλους 3 με κάτοψη ως προς το (β) το σχήμα 3.
δ) Τον εικοστό κύβο με κάτοψη ως προς το (γ) το σχήμα 4.


σχ. 1


σχ. 2.


σχ. 3


σχ. 4.

Οι κύβοι του πρώτου στρώματος αριθμούνται από 1 έως 10.
Κάθε κύβος στα στρώματα 2, 3, 4 παίρνει ως αριθμό το άθροισμα των αριθμών των τριών κύβων πάνω στους οποίους κάθεται.
Να βρεθεί η αρίθμηση του πρώτου στρώματος για να έχουμε τον μικρότερο δυνατό αριθμό στη κορυφή που είναι ο

α) 55, **β)** 83, **γ)** 114, **δ)** 137, **ε)** 144.

22. Έστω κύκλος $(O,\frac{1}{2})$ και ΑΔ διάμετρος του. Δύο ίσες χορδές ΑΒ=ΑΓ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΑΔ με $B\hat{A}\Gamma=12^o$.
Έστω σημείο Ε της ΑΔ ώστε $B\hat{\Delta}\Gamma=36^o$. Τότε ΑΕ=

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 6^o\cdot\sigma\upsilon\nu 12^o}{\sigma\upsilon\nu 18^o}$, **β)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 6^o\cdot\eta\mu 12^o}{\eta\mu 18^o}$, **γ)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 6^o\cdot\eta\mu 12^o}{\sigma\upsilon\nu 18^o}$,

δ) $\dfrac{\eta\mu 6^o\cdot\eta\mu 12^o}{\eta\mu 18^o}$, **ε)** $\dfrac{\eta\mu 6^o\cdot\eta\mu 12^o}{\sigma\upsilon\nu 18^o}$.

23. Ένα κουτί περιέχει 3 αστραφτερές δραχμές και 4 σκουριασμένες.
Αφαιρούμε τις δραχμές από το κουτί τυχαία, μια–μια και χωρίς να τις αντικαθιστούμε.
Αν η πιθανότητα να χρειαστεί να ξεπεράσουμε την τέταρτη αφαίρεση για να αφαιρεθεί από το κουτί και η τρίτη αστραφτερή δραχμή είναι $\frac{\alpha}{\beta}$ σε μορφή ανάγωγου κλάσματος, τότε α+β=

α) 11, **β)** 20, **γ)** 35, **δ)** 58, **ε)** 66.

24. Έστω γωνία $x\hat{O}y=120^o$ και P σημείο της διχοτόμου της Oz.
Θεωρούμε όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα PAB όπου A, B ανήκουν στις Ox, Oy.
(Τα A, B μπορεί να βρίσκονται στην ίδια ή σε διαφορετικές πλευρές της γωνίας και η ανταλλαγή των A και B δεν θεωρείται ότι σχηματίζει διαφορετικά τρίγωνα.)
Το πλήθος των τριγώνων είναι
α) 2, **β)** 3, **γ)** 7, **δ)** 15, **ε)** πάνω από 15.

25. Έστω $f(x)=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$.
Η ελάχιστη τιμή της f είναι
α) $\sqrt{7}-1$, **β)** 3, **γ)** $2\sqrt{3}$, **δ)** 4, **ε)** $\sqrt{55}-\sqrt{5}$.

26. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=8, ΑΓ=6 και ΒΓ=10..
Ένας κύκλος (Κ,1) κυλίεται στο εσωτερικό του ΑΒΓ παραμένοντας εφαπτόμενος σε τουλάχιστον μια πλευρά του τριγώνου.
Πόση απόσταση ταξίδεψε το κέντρο Κ από τη στιγμή που ξεκίνησε η κύλιση μέχρι την επαναφορά του στην αρχική του θέση;
α) 10, **β)** 12, **γ)** 14, **δ)** 15, **ε)** 17.

27. Ποιες από τις παρακάτω τριάδες ***δεν*** αποτελούν τα μήκη των διαγωνίων των εδρών ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκη ακμών ακέραιους αριθμούς;
α) (4,5,6), **β)** (4,5,7), **γ)** (4,6,7), **δ)** (5,6,7), **ε)** (5,7,8).

1995-1996

1. Να ορίσετε συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{N}^*$ και η οποία να ικανοποιεί τη σχέση:

$$[f(1)]^3+[f(2)]^3+\ldots+[f(v)]^3=[f(1)+f(1)+\ldots+f(v)]^2, \text{ για κάθε } v\in\mathbb{N}^*.$$

2. Ο Α και ο Β παίζουν το παρακάτω παιχνίδι:
Σ' ένα χαρτί είναι γραμμένα κ "–" (πρόσημα πλην).
Καθένας, εναλλάξ, μπορεί να αλλάξει ένα είτε δύο πρόσημα από "–" σε "+".
Τα πρόσημα που θα αλλαχθούν μπορούν να βρίσκονται σε οποιαδήποτε θέση αρκεί όταν αλλάζονται δύο αυτά να είναι γειτονικά.
Θα νικήσει αυτός που θα μεταβάλλει το τελευταίο "–" σε "+".
Υπάρχει στρατηγική, ώστε να νικήσει κάποιος από τους παίκτες;

3. Γράφουμε τους αριθμούς 1, 2, ..., 1995 με όποια σειρά θέλουμε, ώστε να σχηματισθεί ένας αριθμός.
Να εξετάσετε αν ο αριθμός που σχηματίζεται είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΔ. Έστω Ε το σημείο τομής των ΒΚ, ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των ΔΚ, ΓΒ.
Να αποδείξετε ότι ΕΔ=ΖΒ.

1996-1997

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα (x,y) για τα οποία ισχύει: $4x^3+4x^2y-12x^2=y^3+xy^2-3y^2$ (1)**.**

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον (O,R) στο Κ. Οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΒΔΚ και ΚΔΓ είναι ίσοι. Να δειχτεί ότι το ΑΒΓ είναι ισοσκελές**.**

3. Έστω το σύνολο $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ $\alpha_i \geq 0$, $i=1, 2, \ldots, \nu$.

Για κάθε i, j υπάρχει κ, $(1 \leq i,j,\kappa \leq \nu)$ ώστε $\alpha_\kappa=\frac{1}{2}|\alpha_i-\alpha_j|$ (1).

Να δειχτεί ότι όλα τα $\alpha_i=0$**.**

4. Έστω η γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ και $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$. Για κάθε $\nu \geq \nu_0$ η f(ν) διαιρεί το ν.
Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f**.**

1997-1998

1. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$f(0)=0$ και $f(x\sigma\upsilon\nu\theta)-f(x\sigma\upsilon\nu^2\theta)=x-x^2\sigma\upsilon\nu\theta$ (1), $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}-\{\kappa\pi, \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$**.**

2. Έστω Α, Β, Γ νxν πίνακες με ΑΒΓ+ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ+Α+Β+Γ=**Ο** (1).
Να δειχτεί ότι Α(Β+Γ)=(Β+Γ)Α (2) ***<u>αν και μόνο αν</u>*** Α(ΒΓ)=(ΒΓ)Α (3)**.**

3. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου του.
Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της $\Pi=\frac{(OA)+(O\Gamma)}{(OB)+(O\Delta)}$**.**

4. Θεωρούμε 9 σημεία που αποτελούν τις κορυφές 10 διαφορετικών τριγώνων. Να δειχτεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο από τα δοσμένα τρίγωνα, τα οποία έχουν ακριβώς μία κοινή κορυφή**.**

1998-1999

1. Έστω $\alpha_\nu=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+2)}$. Να δειχτεί ότι $\alpha_{1999}<\frac{1}{4}(2{,}999)$**.**

2. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$.
α) Να δειχτεί ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί α, β, γ, δ του διαστήματος $\Delta=[\nu^2,(\nu+1)^2]$ που να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο**.**

β) Να προσδιορίσετε όλους τους φυσικούς αριθμούς α, β, γ, δ του διαστήματος $E=[\nu^3,(\nu+1)^3]$ που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο**.**

3. Θεωρούμε την παράσταση $K=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, όπου οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0 ή 1.
Έστω Α(ν) το πλήθος των 2ν-άδων $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$ για τις οποίες ο αριθμός Κ είναι άρτιος και Π(ν) το πλήθος των 2ν-άδων αυτών, για τις οποίες ο αριθμός Κ είναι περιττός.
Να δειχτεί ότι $\dfrac{A(\nu)}{\Pi(\nu)}=\dfrac{2^\nu+1}{2^2-1}$**.**

4. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $\mu=\max\{AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A\}$.
Να δειχτεί ότι $4\mu^2\geq A\Gamma^2+B\Delta^2$**.**

1999-2000

1. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Σημείο Μ κινείται στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.
Να δειχτεί ότι ο λόγος $\dfrac{MA+MB}{M\Gamma+M\Delta}$ είναι σταθερός**.**

2. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Στα ύψη ΑΔ, ΒΕ παίρνουμε σημεία Μ, Ν, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $B\hat{M}\Gamma=A\hat{N}\Gamma=90^o$.
1) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΓΜΝ είναι ισοσκελές**.**
2) Επιπλέον ισχύουν: $MN=4+2\sqrt{3}$ και $M\hat{\hat{A}}N=30^o$.
Να υπολογιστεί το εμβαδόν (ΜΓΝ)**.**

3. Έστω $\mathbb{N}^*$ το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών.
Να δειχτεί ότι το $\mathbb{N}^*$ μπορεί να γραφτεί ως ένωση τριών συνόλων Α, Β, Γ, ανά δύο ξένων μεταξύ τους, που είναι τέτοια ώστε, να ισχύει:
<<αν $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}^*$ με $|\kappa-\lambda|=2$ ή 5, τότε τα κ και λ ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα>>**.**

4. Έστω $x,y,z\in\mathbb{R}$ και ισχύει (Ε): $x^2+2y^2+z^2=\frac{2}{5}\alpha^2$, $\alpha>0$.
Να δειχτεί ότι $|x-y+z|\leq\alpha$**.**

2000-2001

1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Ένας κύκλος που έχει χορδή τη ΒΓ τέμνει τη πλευρά ΑΒ στο μέσον της Δ και τη πλευρά ΑΓ στο Ε. Γράφουμε και τον κύκλο

(γ) που έχει χορδή τη ΓΕ και εφάπτεται της ΒΓ στο Γ. Η ΔΕ προεκτεινόμενη τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ και τον κύκλο (γ) στο Η.
Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΖΑ, ΒΕ και ΓΗ περνάνε από το ίδιο σημείο.

2. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{12(\alpha x+36)}{x^2+36}$, ο α είναι ακέραιος.
Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι ακέραιοι αριθμοί.

3. Για x,y,z>0 να αποδειχτεί ότι:

α) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq\dfrac{x+y}{3}$.

β) $f(x,y,z)=\dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\dfrac{z^3}{z^2+zx+x^2}\geq\dfrac{x+y+z}{3}$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:
Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.
Αν ο μαθητής Α αρχίσει πρώτος, ποιος από τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλαδή ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)

2001-2002

1. Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες οι ρίζες των εξισώσεων

(Ε): $x^2-\alpha x-1=0$ και (Ε'): $x^2-\beta x-1=0$

σχηματίζουν με κατάλληλη διάταξη μία αριθμητική πρόοδο με 4 όρους.

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x,y,z)=x^2yz+3x^2y+2x^2z+6x^2+11xyz+22xz+33xy+66x.$$

1) Να γράψετε το P(x,y,z) ως γινόμενο πρωτοβαθμίων όρων.
2) Για ποιες τριάδες φυσικών αριθμών (x,y,z) ισχύει P(x,y,z)=2002;

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και ισχύει ΑΒ=ΑΓ=3 και ΒΓ=3. Θεωρούμε σημείο Δ της ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΔ=2ΔΓ.
Στο σημείο Δ φέρνουμε ευθεία κάθετη προς την ΑΔ η οποία τέμνει το τόξο

$\overset{\frown}{ΑΒΓ}$ στο Μ.
Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΜΓ συναρτήσει του ΑΜ=κ.

4. Στην Ε.Μ.Ε. γίνονται μαθήματα προετοιμασίας για τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες για τους 20 μαθητές που προκρίνονται στην τελική φάση.
Διδάσκονται 4 μαθήματα: Γεωμετρία, Θεωρία αριθμών, Συνδυαστική, Άλγεβρα.
Δήλωσαν συμμετοχή: στη Γεωμετρία 15 μαθητές, στη Θεωρία αριθμών 13, στη Συνδυαστική 14 και στην Άλγεβρα 19 μαθητές.
Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον μαθητής δήλωσε συμμετοχή και στα 4 μαθήματα.

2002-2003

1. Ο πενταψήφιος αριθμός $A=\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$ (στο δεκαδικό σύστημα) έχει ψηφία x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τέτοια, ώστε $x_3,x_4,x_5>1$ και

$$x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_4x_5=121.$$

Να βρεθεί ο αριθμός Α.

2. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία Α, Β επάνω στις Οx, Οy, αντιστοίχως, έτσι ώστε ΟΑ+ΟΒ=2λ, λ>0.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Τ στο εσωτερικό της γωνίας $x\hat{O}y$ έτσι ώστε Ε(ΟΑΤΒ)=λ^2, ανεξάρτητα από τη θέση των Α και Β.

3. Αν ο αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma}$ (στο δεκαδικό σύστημα) είναι πρώτος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (Ε): $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν έχει ρητή ρίζα.

4. Αν $\alpha\geq 1$ και $z\in\mathbb{C}$ έτσι ώστε $|z+\alpha|\leq\alpha$ και $|z^2+\alpha|\leq\alpha$,
να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κυκλικό δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα α.

2003-2004

1. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \quad \text{και} \quad x^2+y^2=z^2.$$

Να αποδείξετε ότι ικανοποιούν και τη σχέση

$$(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2\leq(\gamma+z)^2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΓΔ=6 και ΑΒ=x, όπου x θετικός ακέραιος.
Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε. Η παράλληλη από το Ε προς τις βάσεις τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.
Να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες το μήκος του ΖΗ είναι θετικός ακέραιος.

3. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ που τέμνει τη ΒΔ στο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο Κ.
Για το σημείο τομής των διαγωνίων Μ ισχύει ΜΑ·ΜΓ+ΜΑ·ΓΔ=ΜΒ·ΜΔ.
Να αποδείξετε ότι $B\hat{K}\Gamma=B\hat{\Delta}\Gamma$.

4. Να αποδείξετε ότι για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ισχύει $\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}+\dfrac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2(\alpha_2+\alpha_3)}+\ldots+\dfrac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}(\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)}+\dfrac{\alpha_1-\alpha_\nu}{\alpha_\nu(\alpha_\nu+\alpha_1)}\geq 0$.

2004-2005

1. Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, που είναι λύσεις της εξίσωσης (Ε): $|z+1|=4z-\bar{z}-6i$;

2. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α, β με α>β, τέτοιους ώστε

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2005}.$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ=γ τέμνει τη μεσοκάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ, που είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι: **1)** $\alpha^2<2(\beta^2-\gamma^2)$.
2) $B\hat{A}\Delta=2\cdot\Delta\hat{A}\Gamma$.

4. Θεωρούμε σύνολο Μ με στοιχεία 2004 θετικούς πραγματικούς αριθμούς με την ιδιότητα:
"Για οποιαδήποτε στοιχεία α, β του Μ με α>β ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς (α+β), (α–β) ανήκει στο σύνολο Μ."
Να αποδείξετε ότι, αν διατάξουμε τους αριθμούς του συνόλου Μ κατά αύξουσα τάξη, τότε αυτοί αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

2005-2006

1. Για μια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f[f(x)]=x^3-2x^2+3x-1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

1) Να βρεθεί το f(1).

2) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $g(x)=x^3+x^2\cdot f(x)-2x\cdot f^2(x)+3$ είναι 1–1.

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta}<\sqrt{5}$.

Να δειχτεί ότι $\sqrt{5}-\frac{\alpha}{\beta}>\frac{1}{4\alpha\beta}$.

3. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ, ΑΔ μη παράλληλη προς το ΒΓ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ.
Να αποδειχτεί ότι υπάρχει σημείο Ρ διάφορο του Ο τέτοιο ώστε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΡΒΔ και ΡΑΓ να ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών ΡΒ και ΡΑ αντίστοιχα.

4. Έστω 2ν>κ και έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ.
Να αποδειχτεί ότι για κάθε ακέραιο λ υπάρχουν δείκτες i, j από το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$ τέτοιοι ώστε $\kappa \mid (\alpha_i+\alpha_j-\lambda)$.

2006-2007

1. Αν $\log_{150}2=x$, $\log_{150}3=y$, τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A=50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}.$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους.
Να εκφράσετε την παράσταση $\Gamma=(1+x_1^2)(1+x_2^2)(1+x_3^2)$ συναρτήσει των κ, λ.

3. Να λύσετε την εξίσωση (Ε): $\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}}=\frac{2x^3+1}{3}$.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, Ι το έγκεντρο, ΒΓ=2 και $B\hat{A}\Gamma=60^o$.
Να αποδείξετε ότι $IA+IB+I\Gamma\leq 2\sqrt{3}$.

2007-2008

1. Αν z μιγαδικός με Re(z)≠0, Im(z)≠0 και $\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}$,
να αποδείξετε ότι |z|=1.

2. Να λύσετε το σύστημα (Σ): $\begin{cases} x^3+3xy+y^3=1 \\ x^3-x^2=y^3-y^2 \end{cases}$.

3. Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu\in\mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=2\nu+1, \text{ για κάθε } \nu\in\mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

4. Έστω Σ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες ΑΣ, ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Α΄, Β' και Γ' αντίστοιχα,
ώστε ΣΑ'≤ΣΑ, ΣΒ'≤ΣΒ, ΣΓ'≤ΣΓ.
Θέτουμε x=(ΣΑΒ), y=(ΣΒΓ), z=(ΣΑΓ).
Να αποδείξετε ότι $x^4+y^4+z^4\le 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$.