Αρχημίδης 1999 - 2005

1999 – 2000

Θέμα 1°.

Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο.
Βρείτε ευθεία του επιπέδου από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν ίσες αποστάσεις.
Πόσες τέτοιες ευθείες του επιπέδου υπάρχουν;

Θέμα 2°.

Για τον τριψήφιο αριθμό $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, ξέρουμε ότι:

i) το ψηφίο των εκατοντάδων ισούται με το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων και των μονάδων

ii) $\beta(\gamma + 1) = 52 - 4\alpha$

Να βρεθεί ο αριθμός.

Θέμα 3°.

Σε προηγούμενη Μαθηματική Ολυμπιάδα για ένα από τα προβλήματα που τέθηκαν, στο οποίο η μέγιστη βαθμολογία ήταν 5, είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:
Ο μέσος όρος των βαθμών των αγοριών ήταν 4, ο μέσος όρος των βαθμών κοριτσιών ήταν 3,25 και ο μέσος όρος των βαθμών του συνόλου των μαθητών ήταν 3,6.
Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια πήραν μέρος, αν ο αριθμός των μαθητών ήταν μεταξύ 30 και 50.

Θέμα 4°.

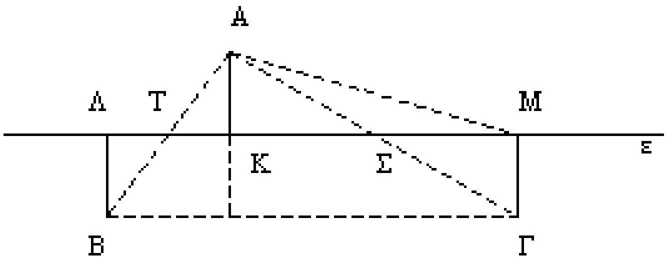
Τέσσερις μαθητές αποφάσισαν να αγοράσουν βιβλία Μαθηματικών, έτσι ώστε :

i) καθένας θα αγοράσει 3 βιβλία διαφορετικά μεταξύ τους,

ii) κάθε δύο από τους τέσσερις μαθητές θα αγοράσουν ένα μόνο ίδιο βιβλίο.

Να βρείτε το μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό διαφορετικών βιβλίων που μπορούν να αγοράσουν συνολικά οι τέσσερις μαθητές.

ΘΕΜΑ 1



Αποκλείεται όλα να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς ε. Άρα θα είναι : ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ. Τότε τριγ. ΒΛΤ = ΤΚΑ ⇨ Τ μέσο ΑΒ, και τριγ. ΚΑΣ = ΣΜΓ ⇨ Σ μέσο ΑΓ. Άρα ε περνάει από τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ. Ομοίως ορίζονται οι ευθείες ε_2 και ε_3.

ΘΕΜΑ 2

Έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \alpha = \beta + \gamma \\ \beta(\gamma + 1) = 52 - 4\alpha \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \beta + \gamma \\ \beta\gamma + \beta = 52 - 4\beta - 4\gamma \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \beta + \gamma \\ \beta\gamma + 5\beta + 4\gamma - 52 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \beta + \gamma \\ (\beta + 4)(\gamma + 5) = 72 \end{Bmatrix}$$

Επειδή β, γ είναι ψηφία θα είναι $4 \leq \beta + 4 \leq 13$ και $5 \leq \gamma + 5 \leq 14$, οπότε από την εξίσωση

$(\beta + 4)(\gamma + 5) = 72$ προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις :

- $\beta + 4 = 8$ και $\gamma + 5 = 9$, οπότε $\beta = 4$, $\gamma = 4$ και $\alpha = 8$. Ο αριθμός είναι ο 844.
- $\beta + 4 = 9$ και $\gamma + 5 = 8$, οπότε $\beta = 5$, $\gamma = 3$ και $\alpha = 8$. Ο αριθμός είναι ο 853.
- $\beta + 4 = 6$ και $\gamma + 5 = 12$, οπότε $\beta = 2$, $\gamma = 7$ και $\alpha = 9$. Ο αριθμός είναι ο 927.
- $\beta + 4 = 12$ και $\gamma + 5 = 6$, οπότε $\beta = 8$, $\gamma = 1$ και $\alpha = 8$. Ο αριθμός είναι ο 981.

ΘΕΜΑ 3

Αν x είναι τα αγόρια και y τα κορίτσια, τότε $4x + 3{,}25y = 3{,}6\,(x + y) \Leftrightarrow 8x = 7y \Leftrightarrow y = \frac{8x}{7}$ και

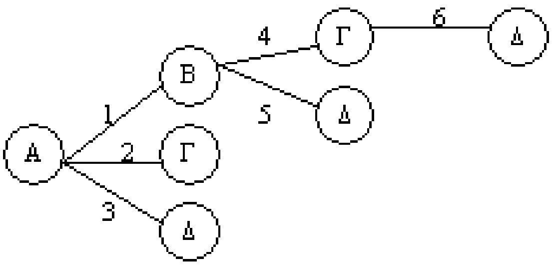
x = πολ. 7. Επομένως ο αριθμός των μαθητών είναι $x + y = x + \frac{8x}{7} = \frac{15x}{7}$.

Άρα $30 < \frac{15x}{7} < 50 \Leftrightarrow 6 < \frac{3x}{7} < 10 \Rightarrow 42 < 3x < 70 \Rightarrow 14 < x < \frac{70}{3} \Rightarrow 14 < x \leq 23$ και αφού x = πολ. 7, θα είναι $x = 21$, οπότε $y = 24$.

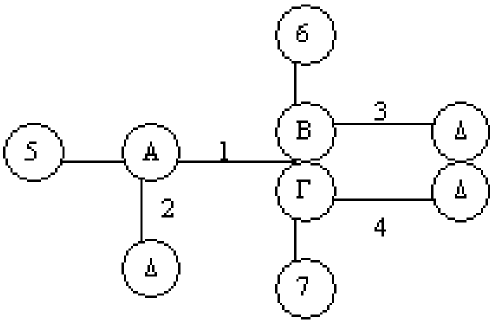
ΘΕΜΑ 4

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις :

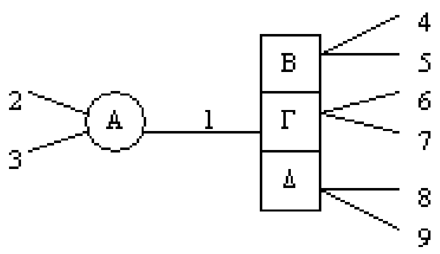
(I) Το ίδιο βιβλίο δύο οποιονδήποτε ζευγών είναι διαφορετικό ανά ζεύγος. Στην περίπτωση αυτή του σχήματος καθένας έχει ήδη αγοράσει 3 διαφορετικά βιβλία. Συνολικά θα αγοράσουν 6 διαφορετικά βιβλία.



(II) Οι τρεις, έστω Α, Β, Γ αγοράζουν το ίδιο βιβλίο. Συνολικά θα αγοράσουν 7 διαφορετικά βιβλία.



(III) Οι τέσσερις αγοράζουν ένα ίδιο βιβλίο. Συνολικά θα αγοράσουν 9 βιβλία.



Άρα ο ελάχιστος αριθμός είναι 6 και ο μέγιστος 9.

2000 – 2001

Θέμα 1ο.

Αν α, β, x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}} \leq \alpha x+\beta y.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Θέμα 2ο.

Οι αριθμοί m, n είναι ακέραιοι.

(α) Να βρεθούν τα ζεύγη (m, n) που επαληθεύουν την εξίσωση

$$m^3 - 4mn^2 = 8n^3 - 2m^2n.$$

(β) Από τα ζεύγη που θα βρείτε να προσδιορίσετε εκείνα που ικανοποιούν την εξίσωση

$$m + n^2 = 3$$

Θέμα 3ο.

Έχουμε 8 σώματα διαφορετικού βάρους και μια ζυγαριά χωρίς σταθμά, δηλαδή με αυτήν μπορούμε μόνο να συγκρίνουμε τα βάρη δύο σωμάτων.

(α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσεων που πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το βαρύτερο σώμα;

(β) Πόσες επιπλέον ζυγίσεις θα χρειασθούμε για να προσδιορίσουμε το δεύτερο σε βάρος σώμα;

Θέμα 4ο.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΑΔ και τις διχοτόμους ΑΕ, ΒΖ που τέμνονται στο Ι. Από το Ι φέρουμε την ΙΘ κάθετη προς την ΑΓ. Επιπλέον φέρουμε την ευθεία χ΄Αχ κάθετη προς ΑΓ. Αν η προέκταση της ΕΘ τέμνει την χ΄Αχ στο σημείο Κ να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΑΚ.

Θέμα 1ο.

Επειδή είναι α, β, x, y > 0 θα έχουμε $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}>0$ και

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}} \le \alpha x+\beta y \Leftrightarrow (\alpha x+\beta y)\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}\right)\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 1$$

ή αρκεί $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\ge 1\left[\text{αφού } \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\right] \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\ge 1 \Leftrightarrow 1\ge 1$, που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y$.

Θέμα 2ο.

(α) $m^3-4mn^2=8n^3-2m^2n \Leftrightarrow m(m^2-4n^2)=2n(4n^2-m^2)$

$$\Leftrightarrow (m^2-4n^2)\cdot(m+2n)=0$$

$$\Leftrightarrow (m-2n)\cdot(m+2n)^2=0$$

$$\Leftrightarrow m=2n \text{ ή } m=-2n.$$

Άρα έχουμε τα ζεύγη (m, n)=(2κ, κ) ή (m, n)=(-2κ, κ), κ∈$\mathbb{Z}$.

(β) Αν (m, n) = (2κ, κ) τότε:

$m+n^2=3 \Leftrightarrow -2\kappa+\kappa^2=3 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-3=0 \Leftrightarrow -\kappa=-1$ ή κ=3.

Άρα είναι (m, n) = (2, 1) ή (-6, -3).

Αν (m, n)= (-2κ, κ) τότε:

$m+n^2=3 \Leftrightarrow -2\kappa+\kappa^2=3 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-3=0 \Leftrightarrow \kappa=-1$ ή κ=3.

Άρα είναι $(m,n)=(2,-1)$ ή (-6, 3)

Θέμα 3ο.

(α) Αν στα δυο μέρη της ζυγαριάς τοποθετήσουμε τετράδες ή τριάδες ή δυάδες σωμάτων, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στη βαρύτερη τετράδα, τριάδα ή δυάδα υπάρχει και το βαρύτερο σώμα. Έτσι πρέπει να γίνει σύγκριση των σωμάτων ανά δύο. Ο ελάχιστος αριθμών ζυγίσεων των σωμάτων ανά δύο είναι 4 για να προκύψει η τετράδα στην οποία υπάρχει και το βαρύτερο σώμα. Ομοίως με 2 ζυγίσεις από την τετράδα προκύπτει η δυάδα που περιέχει το βαρύτερο σώμα και τελικά με μια ακόμα ζύγιση προκύπτει το βαρύτερο σώμα.

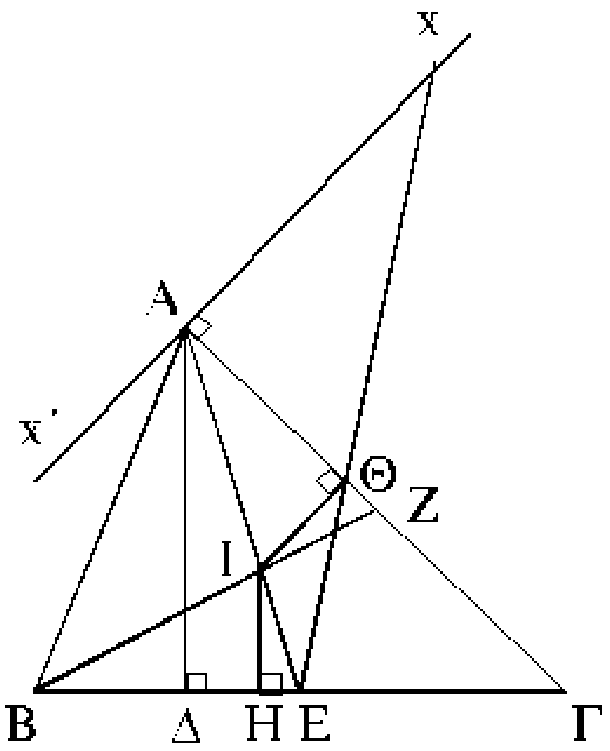
Άρα ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός ζυγίσεων είναι 7.

(β) Το δεύτερο σε βάρος σώμα θα είναι κάποιο από αυτά που συγκρίθηκαν με το βαρύτερο σώμα. Στη παραπάνω διαδικασία το βαρύτερο σώμα έχει συγκριθεί με 3 άλλα σώματα, από τα οποία προκύπτει το

Θέμα 4ο.

Επειδή οι ΙΘ, ΑΚ είναι κάθετες προς την ΑΓ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες, οπότε από τα τρίγωνα ΕΙΘ, ΕΑΚ έχουμε:

$$\frac{\text{ΙΘ}}{\text{ΑΚ}} = \frac{\text{ΙΕ}}{\text{ΕΑ}} \qquad (1)$$



Αν φέρουμε την $\text{ΙΗ} \perp \text{ΒΓ}$, τότε από τα τρίγωνα ΕΙΗ, ΕΑΔ έχουμε:

$$\frac{\text{ΙΗ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΙΕ}}{\text{ΕΑ}} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{\text{ΙΘ}}{\text{ΑΚ}} = \frac{\text{ΙΗ}}{\text{ΑΔ}} \qquad (3)$$

Επειδή το Ι είναι σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ θα έχουμε: ΙΘ=ΙΗ, οπότε από την (3) προκύπτει ότι ΑΚ=ΑΔ.

2001 – 2002

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Προς το εξωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\Gamma\hat{A}\Delta = 90^\circ$.
Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενα τέμνονται στο σημείο Ε.

(ι) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$.

(ιι) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ συναρτήσει της πλευράς α.

(ιιι) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθ. τμήματος ΒΔ συναρτήσει του α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στον διαγωνισμό ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ της Ε.Μ.Ε. συμμετέχουν αγόρια και κορίτσια που χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στους "μικρούς" (με ηλικία που την 1^{η} Ιανουαρίου δε ξεπερνά τα 15 χρόνια) και τους "μεγάλους".

Τα αγόρια που λαμβάνουν μέρος στον φετινό ΑΡΧΙΜΗΔΗ αποτελούν το 55% αυτών που συμμετέχουν. Ο λόγος του πλήθους των "μικρών αγοριών" προς το πλήθος των "μεγάλων αγοριών" ισούται με το λόγο του πλήθους των "μικρών" προς το πλήθος των "μεγάλων".

Να βρεθεί ο λόγος του πλήθους των "μικρών αγοριών" προς το πλήθος των "μικρών κοριτσιών".

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς x, y, z, με $x \le y \le z$ για τους οποίους ισχύει ότι:

$$xy + yz + zx - xyz = 2$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι:

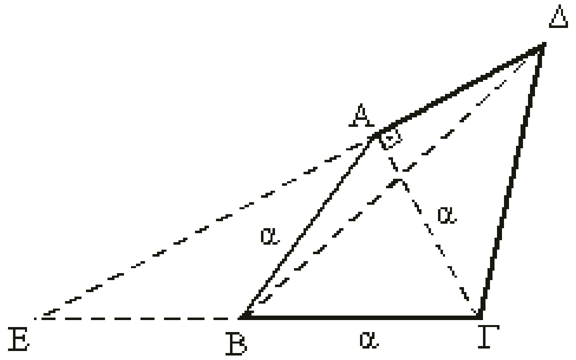
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2002 < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(ι) Από ΑΒ=ΑΔ=α, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \frac{180^\circ - (60^\circ + 90^\circ)}{2} = 15^\circ .$$

Άρα είναι: $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.



(ιι) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ορθογώνιο στο Α με $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 60^\circ$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 30^\circ$, οπότε θα είναι: $\Gamma\mathrm{E} = 2 \cdot \mathrm{A}\Gamma = 2\alpha$ και $\mathrm{AE} = \dfrac{2\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$.

Άρα είναι $\Delta\mathrm{E} = \alpha + \alpha\sqrt{3}$, οπότε

$$(\Gamma\Delta\mathrm{E}) = \frac{1}{2}\Delta\mathrm{E} \cdot \mathrm{A}\Gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha\sqrt{3}) \cdot \alpha = \frac{\alpha^2(1+\sqrt{3})}{2} .$$

(ιιι) Τα τρίγωνα ΓΒΔ και ΓΔΕ έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες μια προς μια, οπότε είναι όμοια. Άρα θα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{B}\Delta}{\alpha(1+\sqrt{3})} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{2}} \Rightarrow \mathrm{B}\Delta = \frac{\alpha(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{B}\Delta = \frac{\alpha(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω: x το πλήθος των "μεγάλων κοριτσιών"
y το πλήθος των "μικρών κοριτσιών"
z το πλήθος των "μεγάλων αγοριών"
w το πλήθος των "μικρών αγοριών"

Τότε, από τις υποθέσεις του προβλήματος, ισχύουν οι σχέσεις:

$$z + w = 0,55(x + y + z + w)$$

$$\frac{w}{z} = \frac{y + w}{x + z}$$

και ψάχνουμε τον λόγο $\frac{w}{y}$.

Από τη σχέση $\frac{z}{w} = \frac{x + z}{y + w}$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{z + w}{w} = \frac{x + y + z + w}{y + w},$$

οπότε θα έχουμε και $\frac{w}{y + w} = \frac{z + w}{x + y + z + w} = \frac{55}{100}$.

Επομένως $\frac{w}{y + w} = \frac{11}{20}$, δηλαδή $\frac{y + w}{w} = \frac{20}{11}$ ή $\frac{y}{w} = \frac{9}{11}$ ή $\frac{w}{y} = \frac{11}{9}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

- Για $x = 0$ είναι $yz = 2$, οπότε έχουμε: $(x, y, z) = (0,1,2)$.
- Για $x = 1$ είναι $y + z = 2$, οπότε έχουμε: $(x, y, z) = (1,1,1)$.
- Για $x = 2$ είναι
  $$2y + yz + 2z - 2yz = 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (y - 2)(z - 2) = 2 \Leftrightarrow y = 3, z = 4,$$

οπότε έχουμε:

$$(x, y, z) = (2,3,4).$$

- Για $x \geq 3$ έχουμε: $z \geq y \geq x \geq 3$ και $xyz \geq 3yz$, $xyz \geq 3zx$, $xyz \geq 3xy$, οπότε με πρόθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$3xyz - 3(xy + yz + zx) \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx - xyz \leq 0,$$

οπότε είναι αδύνατον να αληθεύει η δεδομένη εξίσωση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Θα χρησιμοποιήσουμε τη βασική ανισότητα: $xy \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$ ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l}1\cdot 2002<\left(\dfrac{2003}{2}\right)^2\\ 2\cdot 2001<\left(\dfrac{2003}{2}\right)^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2002\cdot 1<\left(\dfrac{2003}{2}\right)^2\end{array}\right\}\underset{\text{κατά μέλη}}{\overset{\text{πολ/μος}}{\Longrightarrow}}(1\cdot 2\cdot 3\cdots 2002)^2<\left[\left(\dfrac{2003}{2}\right)^2\right]^{2002}\Rightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdots 2002<\left(\dfrac{2003}{2}\right)^{2002}$$

2002 – 2003

1. Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός
$$A=\nu^3-\nu^2+\nu-1$$
είναι πρώτος.

2. Να προσδιορίσετε τετραψήφιο αριθμό $\overline{xyzw}$, ο οποίος έχει την ιδιότητα:
Αν του προσθέσουμε το άθροισμα των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 2003.

3. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Το ύψος του ΑΗ και η μεσοκάθετος ε της πλευράς ΑΒ τέμνονται στο σημείο Μ. Η κάθετη προς την ευθεία ε στο σημείο Μ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΜΔ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Σ, να αποδείξετε ότι:
   (i) $\mathrm{B\Sigma} \parallel \mathrm{AM}$.
   (ii) το τετράπλευρο ΑΜΒΣ είναι ρόμβος.

4. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν ως κλάσματα της μορφής
$$\frac{\mu\nu+1}{\mu+\nu},$$
όπου μ,ν είναι θετικοί ακέραιοι.

1. Ο αριθμός Α γράφεται

$$A = \nu^3 - \nu^2 + \nu - 1 = \nu^2(\nu - 1) + (\nu - 1) = (\nu - 1)(\nu^2 + 1).$$

Επειδή είναι $\nu \geq 1$ θα έχουμε $\nu - 1 \geq 0$ και $\nu^2 + 1 \geq 2$. Άρα ο Α είναι πρώτος μόνον όταν ισχύει ότι ν-1=1, δηλαδή για ν=2.

2. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$$\overline{xyzw} + x + y + z + w = 2003, \qquad (1)$$

με $1 \leq x \leq 9$ και $0 \leq y, z, w \leq 9$.

Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$1000x + 100y + 10z + w + x + y + z + w = 2003$$

$$1001x + 101y + 11z + 2w = 2003 \qquad (2)$$

Επειδή είναι $101y + 11z + 2w \geq 0$, από την (2) προκύπτει ότι $1001x \leq 2003 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$ (αφού ισχύει ότι $1 \leq x \leq 9$).

Η περίπτωση με $x = 2$ οδηγεί στην εξίσωση $1001 + 11z + 2w = 1$, που είναι αδύνατη. Άρα θα είναι $x = 1$.

Για $x = 1$ η (2) γίνεται:

$$101y + 11z + 2w = 1002 \qquad (3)$$

Από $0 \leq z,\ w \leq 9$ προκύπτει ότι:

$$0 \leq 11z + 2w \leq 117 \Leftrightarrow 0 \leq 1002 - 101y \leq 117 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1002 \leq -101y \leq -885 \Leftrightarrow 885 \leq 101y \leq 1002 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{885}{101} \leq y \leq \frac{1002}{101} \Leftrightarrow 8,76 \leq y \leq 9,92 \Leftrightarrow y = 9.$$

Για $y = 9$ η (3) γίνεται: $\qquad 11z + 2w = 93 \qquad (4)$

Από $0 \leq 2w \leq 18$ προκύπτει ότι

$$0 \leq 93 - 11z \leq 18 \Leftrightarrow -93 \leq -11z \leq -75 \Leftrightarrow 75 \leq 11z \leq 93 \Leftrightarrow \frac{75}{11} \leq z \leq \frac{93}{11}$$

$$\Leftrightarrow 6\frac{9}{11} \leq z \leq 8\frac{5}{11} \Leftrightarrow z = 7 \quad ή \quad z = 8.$$

Για z=7 προκύπτει από την (4) ότι $2w = 16 \Leftrightarrow w = 8$ και ο αριθμός είναι $\overline{xyzw} = 1978$.

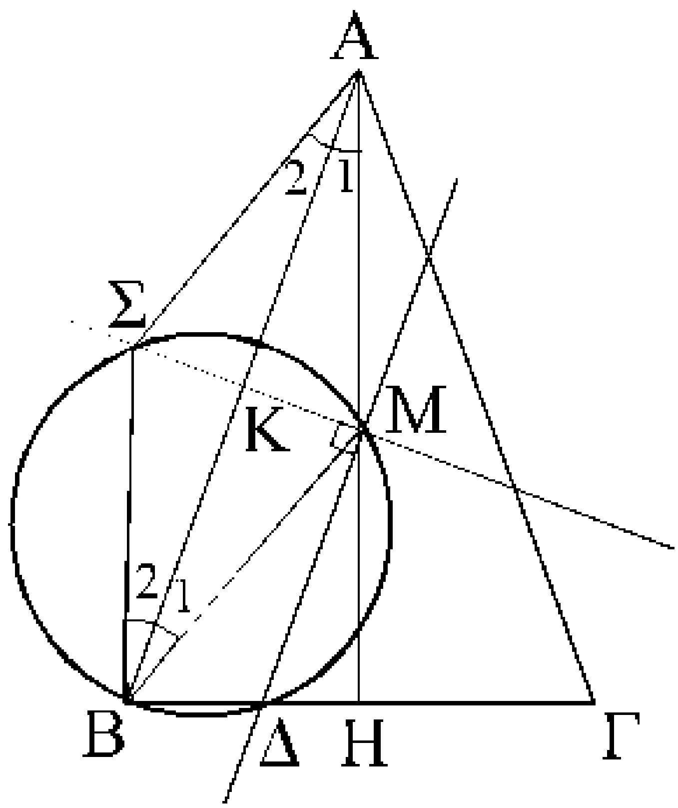
Για z=8 προκύπτει από την (4) ότι $2w = 5$ (αδύνατη).
Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 1978.

3. (i) Επειδή είναι $M\Delta \perp M\Sigma$ η ΔΣ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε θα είναι και $\Delta\hat{B}\Sigma = 90^o$, δηλαδή $B\Sigma \perp B\Gamma$. Επίσης έχουμε $AM \perp B\Gamma$, οπότε θα είναι ΒΣ//ΑΜ.

(ii) Επειδή το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ θα είναι ΜΑ=ΜΒ και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (1).

Επιπλέον $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΣ, ΑΜ με τέμνουσα την ΑΒ.

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Έτσι η ΒΚ στο τρίγωνο ΣΒΜ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο ΣΒΜ είναι ισοσκελές με ΒΣ=ΒΜ.



Έχουμε ακόμη ότι ΒΣ=ΣΑ, αφού το Σ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Άρα έχουμε τελικά ότι: ΜΑ=ΜΒ=ΒΣ=ΣΑ, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΜΒΣ έχει τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

4. Έστω α θετικός ακέραιος και $\alpha = \dfrac{\mu\nu + 1}{\mu + \nu}$, όπου μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι:

$$\mu = \frac{\nu\alpha - 1}{\nu - \alpha} \qquad (1)$$

Από την (1) παρατηρούμε ότι για ν-α=1, δηλαδή για $\nu = \alpha + 1 \in \mathbb{N}^*$, προκύπτει ότι $\mu = (\alpha+1)\alpha - 1 = \alpha^2 + \alpha - 1 \in \mathbb{N}^*$.

Επομένως για τον τυχαίο θετικό ακέραιο α υπάρχουν οι θετικοί ακέραιοι $\mu = \alpha^2 + \alpha - 1$ και ν=α+1 έτσι ώστε να ισχύει:

$$\alpha = \frac{\mu\nu + 1}{\mu + \nu}.$$

2003 – 2004

1. Οι αριθμοί 203 και 298 διαιρούμενοι με το θετικό ακέραιο x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΒΓ και ΑΔ, αντίστοιχα. Η κάθετη από το Β προς την ΑΚ τέμνει την ΑΚ στο Ε και την ΓΛ στο Ζ.

   (ι) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΖΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

   (ιι) Να αποδείξετε ότι : $(ABKZ)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$

   (ιιι) Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΚΖΛ ως συνάρτηση της πλευράς ΒΓ=α.

3. Αν οι x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε
$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$
να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης
$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

4. Να προσδιορίσετε τον ρητό αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β θετικοί ακέραιοι, με τον ελάχιστο παρανομαστή, που είναι τέτοιος ώστε
$$\frac{52}{303} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{16}{91}.$$

1. Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε:

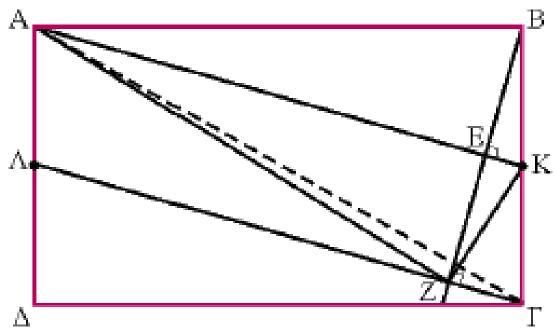
$$203 = x \cdot \kappa + 13 \ \text{ και } \ 298 = x \cdot \lambda + 13, \ \text{όπου } \kappa, \lambda \text{ θετικοί ακέραιοι}$$

οπότε

$$190 = x \cdot \kappa, \ \ 285 = x \cdot \lambda$$

Επομένως ο x είναι κοινός διαιρέτης των 190 και 285. Επειδή $(190, 285) = 5 \cdot 19 = 95$, οι δυνατές τιμές του x είναι κατ' αρχήν οι διαιρέτες του (190,285), δηλαδή οι 1, 5, 19 και 95. Όμως πρέπει x>13, οπότε τελικά θα είναι: x=19 ή x=95.

2.



i) ΑΛ//=ΚΓ άρα ΑΚΓΛ παρ/μο άρα ΑΚ//ΛΖ άρα ΑΚΖΛ τραπέζιο.

Ισχύει ΑΛ=ΚΓ (αφού ΑΚΓΛ παρ/μο)

$$\text{Ακόμα} \left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma Z}} \text{ ορθογώνιο στο Ζ} \\ \text{ΖΚ διάμεσος} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{ZK} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \mathrm{K\Gamma}$$

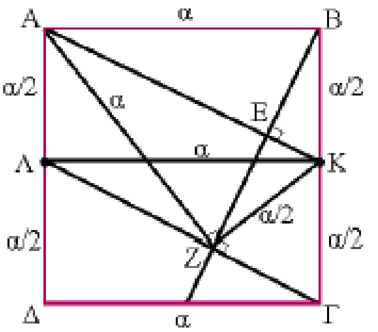
Έτσι ΖΚ=ΚΓ=ΑΛ άρα ΑΚΖΛ ισοσκελές τραπέζιο.

ii) $(\mathrm{ABKZ}) = 2(\mathrm{ABK}) = 2 \cdot (\mathrm{AK\Gamma}) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$.

iii) $(\mathrm{AKZ\Lambda}) = \frac{\mathrm{AK} + \mathrm{\Lambda Z}}{2} \cdot \mathrm{EZ}$

Είναι: $AK^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4}$(ABK ορθογώνιο τρίγωνο).

Έτσι $AK = \frac{\sqrt{5}\alpha}{2}$



Ακόμα: $(ABK) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}BE \cdot AK \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2} = BE \cdot \frac{\sqrt{5}\alpha}{2} \Leftrightarrow BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{5}$.

Όμως Ε μέσον ΒΖ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΕΖ είναι ίσα, έτσι

$$BE = EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{5}$$

$$\Lambda Z = \Lambda\Gamma - Z\Gamma = AK - Z\Gamma \qquad (1)$$

Από $B\overset{\Delta}{Z}\Gamma$: $Z\Gamma^2 = \alpha^2 - \left(2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{5}}{5}\right)^2 \Rightarrow Z\Gamma^2 = \alpha^2 - \frac{20\alpha^2}{25} \Rightarrow$

$$Z\Gamma^2 = \alpha^2 - \frac{4\alpha^2}{5} \Rightarrow Z\Gamma^2 = \frac{\alpha^2}{5} \Rightarrow Z\Gamma = \frac{\sqrt{5}\alpha}{5}$$

από (1), $\quad \Lambda Z = \frac{\sqrt{5}\alpha}{2} - \frac{\sqrt{5}\alpha}{5} = \frac{5\sqrt{5}\alpha - 2\sqrt{5}\alpha}{10} = \frac{3\sqrt{5}\alpha}{5}$

Έτσι $(AKZ\Lambda) = \dfrac{\frac{\sqrt{5}\alpha}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\frac{5\sqrt{5}\alpha + 3\sqrt{5}\alpha}{10}}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{5}}{5} =$

$$= \frac{8\sqrt{5}\alpha}{2 \cdot 10} \cdot \frac{\alpha\sqrt{5}}{5} = \frac{2 \cdot \alpha^2 \cdot 5}{25} = \frac{2\alpha^2}{5} \text{ τ.μ.}$$

3. $A^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

$= \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2 \cdot 25 \geq \frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} + \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} + \frac{zx}{y} \cdot \frac{yz}{x} + 2 \cdot 25$

$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2 \cdot 25 = 25 + 2 \cdot 25 = 75$.

Άρα έχουμε $A^2 \geq 3 \cdot 25$, οπότε $A \geq 5\sqrt{3}$, αφού Α>0.

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Leftrightarrow x = y = z$, οπότε από $x^2 + y^2 + z^2 = 125$ προκύπτει ότι:

$$x = y = z = 5\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α είναι $5\sqrt{3}$ και λαμβάνεται για

$$x = y = z = 5\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Έχουμε $\frac{52}{303} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{16}{91} \Leftrightarrow \frac{91}{16} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{303}{52} \Leftrightarrow 5 + \frac{11}{16} < \frac{\beta}{\alpha} < 5 + \frac{43}{52}$ Άρα

$\frac{\beta}{\alpha} > 5$ και $\frac{\beta}{\alpha} < 6 \Leftrightarrow 5\alpha < \beta < 6\alpha$ επομένως $\beta = 5\alpha + x$, με $0 < x < \alpha$.

Τότε έχουμε:

$$\frac{11}{16} < \frac{x}{\alpha} < \frac{43}{52} \Leftrightarrow \frac{52x}{43} < \alpha < \frac{16x}{11},$$ όπου α,x θετικοί ακέραιοι

Ο μικρότερος x που ικανοποιεί την τελευταία διπλή ανισότητα είναι ο x=3, οπότε α=4 και $\beta = 5\alpha + x = 23$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{23}$.

Για $x \geq 4$ έχουμε $\frac{52 \cdot 4}{43} = \frac{208}{43} = 4 + \frac{36}{43} < \alpha \in \mathbb{Z}_+^*$, οπότε $\alpha \geq 5$ και $\beta = 5\alpha + x \geq 5 \cdot 5 + 4 = 29$.

Άρα ο ζητούμενος ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $\frac{4}{23}$.

2004 – 2005

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $ΑΒ = \alpha$, $ΓΔ = 2\alpha$ και $ΔΒ \perp ΒΓ$. Έστω Μ το μέσον της $ΓΔ$, Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου $ΑΒΜΔ$, Κ το σημείο τομής των ευθειών $ΔΑ$, $ΓΒ$ και $Λ$ το σημείο τομής των ευθειών $ΚΟ$ και $ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι :

(i) το τετράπλευρο $ΑΒΜΔ$ είναι ρόμβος,

(ii) το τρίγωνο $ΓΔΚ$ είναι ισοσκελές και

(iii) η ευθεία $ΔΛ$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $ΚΒ$ στο μέσον του.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν σε τριψήφιο θετικό ακέραιο Α προσθέσουμε το πενταπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 840. Να βρεθεί ο αριθμός Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(\nu) = \frac{2\nu + 1 + \sqrt{\nu(\nu+1)}}{\sqrt{\nu+1} + \sqrt{\nu}},$$

όπου ο ν είναι θετικός ακέραιος.

(i) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2\sqrt{2} - 1$.

(ii) Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος

$$\Sigma = f(1) + f(2) + \ldots + f(100).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται κύκλος C κέντρου O και ακτίνας R καθώς και σημείο Α εκτός αυτού με $ΑΟ = d$. Να προσδιορίσετε σημεία Β, Γ και Δ πάνω στο κύκλο C έτσι ώστε να σχηματίζεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

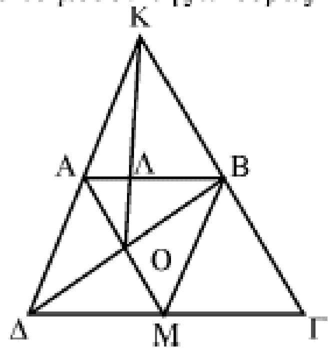
1. **(i)** Επειδή $AB \parallel \Delta M$ και $AB = \Delta M = \alpha$ το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β και η ΒΜ είναι η διάμεσος αυτού από το Β, θα είναι $BM = \Delta\Gamma/2 = \alpha$.

Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΒΜΔ είναι ρόμβος.

(ii) Η διαγώνιος ΔΒ διχοτομεί τη γωνία Δ και είναι $\Delta B \perp AM$, οπότε θα είναι και $\Delta B \perp A\Gamma$ (αφού το ΑΜΓΒ είναι παραλληλόγραμμο). Άρα η ΔΒ είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΓΔΚ, οπότε το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ισοσκελές με ΔΓ=ΔΚ.

(iii) Επειδή το Β είναι μέσον της ΓΚ και $BA \parallel \Gamma\Delta$, το Α θα είναι μέσον της ΚΔ και η ΒΑ διάμεσος του τριγώνου ΔΒΚ. Επίσης η ΚΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΒΚ το σημείο Λ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΒΚ.

Άρα η ΔΛ περνάει από το μέσον της πλευράς ΒΚ.



2. Υψώνουμε τις δύο ισότητες στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε θα έχουμε:

$(\alpha\beta+\gamma\delta)^2+(\alpha\gamma-\beta\delta)^2 = 34^2+19^2 \Leftrightarrow (\alpha^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2) = 1517 = 37\cdot 41$

Επειδή οι αριθμοί 37 και 41 είναι πρώτοι και επιπλέον αποκλείεται η περίπτωση $\alpha^2+\delta^2=1$ ή $\beta^2+\gamma^2=1$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\neq 0)$, έπεται ότι

$\alpha^2+\delta^2=37$ και $\beta^2+\gamma^2=41$ ή $\alpha^2+\delta^2=41$ και $\beta^2+\gamma^2=37$.

Επειδή ισχύει $37=6^2+1^2$, $41=5^2+4^2$ και α>β>γ>δ, από όλες τις πιθανές λύσεις, μόνο η τετράδα

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(6,5,4,1)$$

επαληθεύει το σύστημα.

3. **(ι)** $f(1)=\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(3+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1}=2\sqrt{2}-1.$

(ιι) Αν θέσουμε $\sqrt{\nu+1}=x, \sqrt{\nu}=y$, τότε $x^2=\nu+1, y^2=\nu$ και $x^2+y^2=2\nu+1, \sqrt{\nu(\nu+1)}=xy, x^2-y^2=1$, οπότε έχουμε

$$f(\nu)=\frac{x^2+y^2+xy}{x+y}=\frac{(x^2+y^2+xy)(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=x^3-y^3=\left(\sqrt{\nu+1}\right)^3-\left(\sqrt{\nu}\right)^3$$

Άρα έχουμε

$$S=\left(\sqrt{2}\right)^3-1+\left(\sqrt{3}\right)^3-\left(\sqrt{2}\right)^3+\ldots+\left(\sqrt{401}\right)^3-\left(\sqrt{400}\right)^3=\left(\sqrt{401}\right)^3-1$$

4. Έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot \mathrm{AK} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot \mathrm{\Gamma\Lambda}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot(\mathrm{AK}+\mathrm{\Gamma\Lambda}) \le \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot \mathrm{A\Gamma},$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{B\Delta}$.
Η παραπάνω σχέση μπορεί να προκύψει και ως εξής:

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot \mathrm{AK} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot \mathrm{\Gamma\Lambda}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot(\mathrm{AM}\,\eta\mu\omega + \mathrm{\Gamma M}\,\eta\mu\omega) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot \mathrm{A\Gamma}\cdot \eta\mu\omega \le \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Delta}\cdot \mathrm{A\Gamma},$$

όπου $\omega = \mathrm{A\hat{M}\Delta}$. Η ισότητα ισχύει όταν $\eta\mu\omega = 1$, δηλαδή όταν $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{B\Delta}$.
Επομένως το (ΑΒΓΔ) γίνεται μέγιστο, όταν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες και πάρουν τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή τους, δηλαδή όταν $\mathrm{B\Delta} = 2R$ και $\mathrm{A\Gamma} = d + R$, αφού

$$\mathrm{A\Gamma} \le \mathrm{AO} + \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{AO} + \mathrm{OA'} = \mathrm{AA'} = d + R.$$

Άρα το σημείο Γ πρέπει να είναι το σημείο τομής της ΑΟ με τον κύκλο για το οποίο ισχύει $\mathrm{A\Gamma} = d + R$, ενώ η ΒΔ πρέπει να είναι η διάμετρος του κύκλου που είναι κάθετη προς την ΑΟ.