ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ Ε.Μ.Ε.
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

1995-1996

1. Να λύσετε την εξίσωση: $1+\{3\cdot[5-(7+x):9]-7\}\cdot 5=26$.

2. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διάμεσους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ (που διέρχονται από το ίδιο σημείο Θ).
Πόσες γωνίες, μικρότερες από 180^0, σχηματίζουν οι διάμεσοι με τις πλευρές του τριγώνου και μεταξύ τους;

3. Οι αριθμοί α, β είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 5 και 6. Οι αριθμοί β, γ είναι αντιστρόφως ανάλογοι με τους αριθμούς 3 και 4.
Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\alpha^2+\beta^2$ και $\beta^2+\gamma^2$ είναι τέλεια τετράγωνα.

4. Σ' ένα χορό πήραν μέρος 8 αγόρια και 8 κορίτσια. Κάθε αγόρι χόρεψε με μερικά κορίτσια και κάθε κορίτσι με μερικά αγόρια. Μετά το τέλος του χορού κάθε άτομο έγραψε τον αριθμό των χορών που χόρεψε.
Έτσι πήραμε τους αριθμούς: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6.
Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί δεν είναι οι σωστοί, γιατί κάπου υπάρχει λάθος.

1996-1997

1. Οι σελίδες ενός βιβλίου είναι αριθμημένες με διαδοχικούς αριθμούς 1, 2, 3, ...
Από την πρώτη μέχρι την τελευταία σελίδα χρησιμοποιήθηκαν 4909 ψηφία.
Να βρεθεί πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

2. Έστω $\alpha=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1996}$, $\beta=1+\frac{2}{4}+\frac{4}{6}+\frac{6}{8}+\frac{8}{10}+\ldots+\frac{3990}{3992}$.
Να υπολογιστεί το α+β.

3. Έστω τετράγωνο ΚΛΜΝ πλευράς 21 και Α, Β, Γ, Δ σημεία των ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ ώστε ΚΑ=9, ΛΒ=5, ΜΓ=12, ΝΔ=13.
Να δειχτεί ότι ΔΑ+ΔΒ+1>ΑΒ+ΑΓ.

4. Από τους 18 αριθμούς, 1, 2, 3, ..., 18, επιλέγουμε στη τύχη τέσσερις διαφορετικούς.
Να δειχτεί ότι από αυτούς τους τέσσερις υπάρχουν δύο, έστω οι α και β, με $0<\alpha-\beta\leq 5$.

1997-1998

1. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y όταν $\begin{cases} x+y=30 \\ x\cdot\dfrac{\left\{\left[(5^3)^{12}:5^{2^5}\right]-5^2\right\}:50}{(4+2^{192}:2^{188}):5}=y \end{cases}$.

2. Να προσδιοριστούν τα ψηφία $\alpha\in\{1, 2, \dots, 9\}$, $\beta\in\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, αν το κλάσμα $K=\dfrac{10\alpha+\beta}{\alpha+\beta}$ απλοποιείται με το 6.

3. Να προσδιοριστεί ο αριθμός x αν είναι γνωστό ότι

$$2^{1997}-2^{1996}-1+\left\{\left[(2^{80}:2^{78}):2^2\right]\cdot x-1-2^2\right\}(x+3^2)=2^{1995}+2^{1994}+\dots+2^2+2+1.$$

4. Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;

1998-1999

1. Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί α, β όταν $\alpha^2(\beta+2)=4375$.

2. Έστω α,β,γ φυσικοί αριθμοί με $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=20 \\ 3\alpha+2\beta+3\gamma=67 \end{cases}$.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης **A**$=(2\alpha+\beta+2\gamma)(4\alpha+3\beta+4\gamma)$.

3. Το σημείο M_1 είναι το μέσον του ΑΒ, το M_2 το μέσον του AM_1, το M_3 το μέσον του AM_2 κτλ. και το M_{10} είναι το μέσον του AM_9.

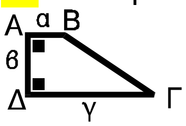
Αν $AB=2^{11}\cdot 3$ να βρεθεί το AM_{10}.

4. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΑΔ και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΜ (το Μ βρίσκεται προς το μέρος της ΓΔ).

Αν Ε είναι το μέσον της ΒΜ, να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{E}\Gamma$.

1999-2000

1. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος έχουμε $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$, ΑΒ=α, ΑΔ=β, ΓΔ=γ.



Οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι, ανάλογοι των αριθμών 1, 2, 3, αντίστοιχα και έχουν άθροισμα 30.

Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

2. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

A$=(200+196+192+\dots+8+4)-(198+194+190+\dots+6+2)$.

3. Σε μια τάξη που έχει συνολικά 240 μαθητές, το 50% των μαθητών παίζει ποδόσφαιρο, το 40% παίζει μπάσκετ και το 10% των μαθητών παίζει και τα δύο.
Να βρείτε ποσοστό, επί τοις εκατό, των μαθητών της τάξης, που δεν παίζει ούτε ποδόσφαιρο ούτε μπάσκετ.

4. Στο διπλανό πίνακα

α	β	γ
δ	0	ε
ζ	η	θ

έχουν τοποθετηθεί οι ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ και το 0 (μηδέν). Το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής (οριζόντια), κάθε στήλης (κατακόρυφα) και κάθε διαγωνίου ισούται με κ.
Να δειχτεί ότι κ=0.

2000-2001

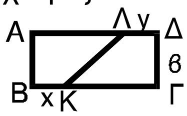
1. Το έτος 2001 έχει την εξής ιδιότητα:
Είναι τετραψήφιος αριθμός και αν διπλασιάσουμε το ψηφίο των μονάδων παίρνουμε το ψηφίο των χιλιάδων.
Να βρεθεί το πλήθος όλων των τετραψήφιων αριθμών που έχουν την παραπάνω ιδιότητα.

2. Αν για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν ισχύει η ισότητα $\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$ να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2001}$.

3. Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να δειχτεί ότι ο αριθμός

$$A=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\nu}}}$$ δεν είναι ποτέ ακέραιος.

4. Στο σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και το τμήμα ΚΛ το χωρίζει σε δύο τετράπλευρα που έχουν ίσα εμβαδά.

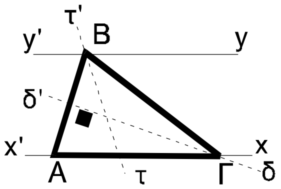


Αν είναι ΒΓ=α, ΓΔ=β, ΒΚ=x και ΛΔ=y, να δειχτεί ότι:
1) x=y. **2)** Τα τρίγωνα ΒΟΚ και ΛΟΔ έχουν ίσα εμβαδά (Ο το κέντρο του).
3) Τα τετράπλευρα ΑΒΟΛ και ΓΔΟΚ έχουν ίσα εμβαδά.

2001-2002

1. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A=\left[(-1)^{10}+(-1)^{11}\right]\cdot(2^4-3^2)+5^{12}:5^{10}-20$.

2. Στο σχήμα έχουμε:
- ευθείες x'x//y'y,
- η ευθεία δδ' είναι μεσοκάθετος του ΑΒ,



- η ευθεία τ'τ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{B}\Gamma$,
- $A\hat{\Gamma}B=\Gamma\hat{B}\tau=\omega$

Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

3. Ένα μπουφάν είχε τιμή πώλησης τον περασμένο Σεπτέμβριο 30.000 δρχ. Τον Δεκέμβριο η τιμή του αυξήθηκε κατά 8%. Στις 14 Ιανουαρίου, με την έναρξη των εκπτώσεων πρόκειται να γίνει έκπτωση 25% επί της τιμής πώλησης.
Να βρείτε πόσο θα πωλείται το μπουφάν κατά την περίοδο των εκπτώσεων σε δραχμές και σε ευρώ, στρογγυλοποιημένο στο εκατοστό (1 ευρώ=340,75 δρχ).

4. Στον παρακάτω πολλαπλασιασμό πρέπει να χρησιμοποιήσετε όλα τα ψηφία από 1 έως 9 και να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα:

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{2} & \boxed{} & \boxed{} \\ & \times & \boxed{} & \boxed{8} \\ \hline \boxed{5} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

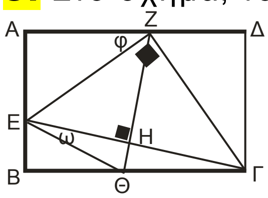
2002-2003

1. Ο αριθμός x είναι θετικός ακέραιος και το κλάσμα $\frac{3-x}{2}$ είναι αριθμός αρνητικός μεγαλύτερος από το –1.
Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους των οποίων το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με x.

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους α, β, γ, δ αν είναι γνωστό ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3},\quad \frac{\beta}{\gamma}=\frac{3}{4},\quad \frac{\gamma}{\delta}=\frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \alpha\beta\gamma\delta=120.$$

3. Στο σχήμα, το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, η ΖΘ είναι μεσοκάθετος της

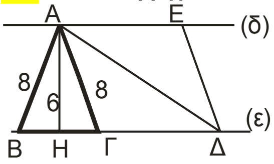


ΓΕ και το τρίγωνο ΖΕΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο Ζ.
Αν $A\hat{Z}E=\varphi$, να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{E}\Theta$ ως συνάρτηση του φ.

4. Καθένας από τους αριθμούς Α=888⋯8, Β=444⋯4 έχει 2003 ψηφία, ενώ καθένας από τους αριθμούς Γ=333⋯3, Δ=666⋯7 έχει 2002 ψηφία.
Ποιος από τους αριθμούς Χ=Α·Γ, Υ=Β·Δ είναι μεγαλύτερος και πόσο;

2003-2004

1. Στο σχήμα οι ευθείες (ε)//(δ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ΑΒ=ΑΓ=8,



ΑΗ=6 ύψος και ΑΔ διχοτόμος της $\Gamma\hat{A}E$ και ΔΕ//ΑΓ.

Να υπολογιστεί: **1)** Το μήκος της ΓΔ**.**

2) Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ**.**

2. Ο αριθμός Α προκύπτει από το γινόμενο δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων και είναι μικρότερος του 20, ενώ ο αριθμός Β προκύπτει από το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων και είναι μικρότερος του 30.

Το πηλίκο $\frac{A}{B}$ έχει την ιδιότητα να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $K=1000\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^{1000}+2004\cdot A^2-2004\cdot B^2$**.**

3. Οι μη παράλληλες πλευρές ισοσκελούς τραπεζίου έχουν μήκη 10 m η κάθε μία, ενώ η περίμετρος του είναι 152 m. Το ύψος του είναι το $\frac{1}{9}$ της μεγάλης βάσης και οι βάσεις του είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6 και 5.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου**.**

4. Ένας επιστήμονας και ο βοηθός του ανέλαβαν μια έρευνα σε χημικό εργαστήριο, από την οποία θα εισπράξουν 85.116 €.

Ο επιστήμονας θα απασχοληθεί για 42 μέρες και ο βοηθός του για 45 μέρες.

Η ημερήσια αμοιβή του επιστήμονα είναι κατά 40% μεγαλύτερη της ημερήσιας αμοιβής του βοηθού του.

Να βρεθούν τα χρήματα που θα εισπράξει ο καθένας**.**

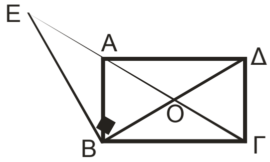
2004-2005

1. Να εκφράσετε την παράσταση

$$A=3\cdot 2^{18}\cdot\left[1-(-1)^3\right]-2^6\cdot(3^2-1)\cdot(3^3-11)\cdot(3^4-17),$$

ως δύναμη με βάση το 2**.**

2. Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Η ΒΕ είναι κάθετη προς τη ΒΔ.



Να αποδείξετε ότι: **1)** $A\hat{E}B=30^o$. **2)** ΕΒ=ΒΓ.
3) ΕΑ=ΑΒ.

3. Ένα Γυμνάσιο έχει συνολικά 240 μαθητές. Οι αριθμοί α, β και γ των μαθητών των τριών τάξεων Α', Β' και Γ' αντίστοιχα, είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3, 4 και 5 αντίστοιχα.
1) Να βρείτε πόσους μαθητές έχει κάθε τάξη του Γυμνασίου.
2) Αν το 40% των μαθητών της Α' τάξης, το 30% των μαθητών της Β' τάξης και το 24% των μαθητών της Γ' τάξης παίζουν ποδόσφαιρο, να βρείτε το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών του Γυμνασίου που παίζουν ποδόσφαιρο.

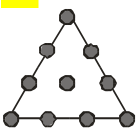
4. Η Β' τάξη ενός Γυμνασίου έχει 10 μαθητές περισσότερους από την Α' τάξη, ενώ η Γ' τάξη έχει 10 μαθητές περισσότερους από την Β' τάξη.
Ο αριθμός Σ όλων των μαθητών του Γυμνασίου, αν διαιρεθεί με καθέναν από τους αριθμούς 5, 6, και 8, δίνει υπόλοιπο 3.
Επιπλέον ο αριθμός Σ είναι μεγαλύτερος του 250 και μικρότερος του 450.
Να βρείτε πόσους μαθητές έχει κάθε τάξη του Γυμνασίου.

2005-2006

1. Οι αριθμοί α, β είναι ακέραιοι και ισχύει α+β=1000.
Είναι δυνατόν να ισχύει 3α+5β=3005;
Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 6 λευκά, 9 κίτρινα, 12 κόκκινα και 15 πράσινα σφαιρίδια.
Να προσδιοριστεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να πάρουμε τυχαία έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η παρουσία στο δείγμα τουλάχιστον
α) 3 λευκών, **β)** 5 κίτρινων,
γ) 6 κόκκινων, **δ)** 10 πράσινων σφαιριδίων
(τέσσερα διαφορετικά ερωτήματα).

3. Δέκα σημεία είναι τοποθετημένα σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου



όπως στο σχήμα.
Να διαγραφεί ο ελάχιστος αριθμός σημείων έτσι ώστε τα υπόλοιπα να μη σχηματίζουν κανένα ισόπλευρο τρίγωνο.

4. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=\frac{1}{99}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{99}\right) \quad \text{και} \quad B=\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}\right).$$

Ποιος είναι μεγαλύτερος και γιατί;

2006-2007

1. Να προσδιοριστούν οι φυσικοί αριθμοί ν για τους οποίους ο αριθμός $\frac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $A\hat{O}B$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ (προς το μέρος του Ο). Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $O\Delta\perp OA$ και ευθεία $OE\perp OB$.
Ισχύει $\Gamma\hat{O}E=4A\hat{O}B$. Να υπολογιστεί η γωνία $A\hat{O}B$.

3. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)\neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}.$$

Να δειχτεί ότι ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ, δ ισούται με μηδέν.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής αβγαβγ, όπου α, β, γ είναι ψηφία με $\alpha\neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11, 13.

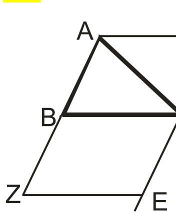
2007-2008

1. Αν ισχύει $8x+10y=1$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=2008-4(4x+5y)-48x-60y.$$

2. Σε μια ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου αριθμού α με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου.
Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του α;

3. Στο σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που περνάει από το Γ



παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ.
Επιπλέον, δίνεται ότι ΑΒ=ΓΔ=ΓΕ.
Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΖ=ΑΒ.
α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.)
β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος ΑΖΕΔ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ;

4. **α)** Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής

Α=αβαβαβ,

όπου α, β ψηφία, διαιρείται με το 3.
β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής Α=αβαβαβ, όπου α, β ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.