ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός. Δίνουμε τον εξής ορισμό:

- **Ορισμός**

Ονομάζουμε **ακέραιο μέρος του $\mathbf{x}$** και το συμβολίζουμε $[\mathbf{x}]$, τον πιο μεγάλο ακέραιο που δεν υπερβαίνει τον x. Έτσι

$[3,98]=3$, $\quad [0,14]=0$, $\quad [-4,18]=-5$, $\quad [\pi]=3$, $\quad [e]=2$

Θεώρημα του ακέραιου μέρους

Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει μοναδικός ακέραιος κ τέτοιος ώστε

$$\kappa \le x < \kappa+1$$

Δηλαδή:

Κάθε πραγματικός αριθμός x είναι ακέραιος ή βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων.

Αν $\kappa=[x]$ τότε $\forall x \in R$ ισχύει

$$[x] \le x < [x]+1 \qquad (1)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

1. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$\mathbf{x-1<[x]\le x}$$

<u>*Απόδειξη*</u>: Από (1) έχουμε $[x]\le x$ και $x<[x]+1 \Leftrightarrow x-1<[x]$

Άρα $\quad x-1<[x]\le x$

2. Για κάθε πραγματικό x ισχύει : $\mathbf{0 \le x-[x]<1}$

<u>*Απόδειξη*</u>: $[x]\le x<[x]+1 \Leftrightarrow [x]-[x]\le x-[x]<[x]+1-[x] \Leftrightarrow$

Άρα $\quad 0\le x-[x]<1$

3. Για κάθε $x\in R$ $\exists$ $\theta\in[0,1)$: $\mathbf{x=[x]+\theta}$

<u>*Απόδειξη*</u>: Θέτω $x-[x]=\theta$. Τότε $x=[x]+\theta$.

4. Για κάθε $x \in Z$ ισχύει $x = [x]$ και αντίστροφα.

Απόδειξη: Αν $x = [x] \in Z$ τότε $x \in Z$

Έστω τώρα $x \in Z$. Θα δείξουμε ότι $x = [x]$.

Ισχύει όμως $x = [x] + \theta$, $0 \le \theta < 1$

Τότε $[x] + \theta = [x]$ δηλαδή $\theta = 0$. Άρα $x = [x]$.

5. Για κάθε $\kappa \in Z$ και κάθε $x \in R$ ισχύει $\mathbf{[x+\kappa] = [x] + \kappa}$

Απόδειξη: Ισχύει $[x] \le x < [x] + 1$

προσθέτοντας τον ακέραιο κ παίρνουμε: $[x] + \kappa \le x + \kappa < ([x] + \kappa) + 1$

Άρα $[x+\kappa] = [x] + \kappa$ διότι οι αριθμοί $[x] + \kappa$, $([x] + \kappa) + 1$ είναι διαδοχικοί.

6. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει $\mathbf{x = y \Rightarrow [x] = [y]}$ όχι όμως αντίστροφα.

Απόδειξη: Από την (1) έχουμε $[x] \le x < [x] + 1$ και επειδή $x = y$ παίρνουμε

$$[x] \le y < [x] + 1 \text{ δηλαδή}$$

$$[x] = [y]$$

Το αντίστροφο δεν αληθεύει

$[1,2] = [1,3] = 1$ εντούτοις $1,2 \ne 1,3$.

7. Για κάθε $x, y \in R$ ισχύει

$$\mathbf{[x+y]} = \begin{cases} \mathbf{[x]+[y]} \\ \mathbf{ή} \\ \mathbf{[x]+[y]+1} \end{cases}$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα του ακέραιου μέρους έχουμε:

$$[x] \le x < [x] + 1$$

$$[y] \le y < [y] + 1$$

Με πρόσθεση: $[x] + [y] \le x + y < [x] + [y] + 2$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- $[x]+[y] \le x+y < [x]+[y]+1$ οπότε $[x+y]=[x]+[y]$
- $[x]+[y]+1 \le x+y < [x]+[y]+2$ οπότε $[x+y]=[x]+[y]+1$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε: $\mathbf{[x]+[y] \le [x+y] \le [x]+[y]+1}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για κάθε $x \in R$ ισχύει

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & \text{αν } x \in Z \\ -1 & \text{αν } x \notin Z \end{cases}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $x>0$, τότε ισχύει: $1-x < x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \le 1$

β) αν $x<0$, τότε ισχύει: $1 \le x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] < 1-x$

γ) $\forall x \in R^*$ ισχύει: $x-x^2 < x^2 \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \le x$

3. Να αποδείξετε ότι, αν $\alpha,\beta \in R_+^*$ τότε ισχύουν

α) $\frac{\alpha-x}{\beta} < \frac{x}{\beta}\left[\frac{\alpha}{x}\right] \le \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall x \in (0,+\infty)$

β) $\frac{\alpha-x}{\beta} > \frac{x}{\beta}\left[\frac{\alpha}{x}\right] \ge \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall x \in (-\infty,0)$

4. Αν $x \in R$ και $\nu \in N^*$, τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

α) $x-\frac{1}{\nu} < \frac{[\nu x]}{\nu} \le x$

β) $\left[x-\frac{1}{\nu}[\nu x]\right]=0$

5. Να βρείτε τα σύνολα λύσεων των παρακάτω εξισώσεων:

α) $[x+5]=3$

β) $x=\left[\frac{2x}{3}\right]+7$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΟΡΙΩΝ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ

- Όριο συνάρτησης που έχει στον τύπο της, παράσταση του x μέσα στο σύμβολο του ακέραιου μέρους. Παρουσιάζεται δηλαδή $\left[g(x)\right]$, όπου $g(x)$ μια συνάρτηση του x. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ τότε δουλεύουμε με την ανισότητα $g(x)-1<\left[g(x)\right]\le g(x)$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\alpha\in R$ τότε, υπάρχει σύνολο $U\left(x_0,\delta\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\alpha-\varepsilon<g(x)<\alpha+\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$ και επιλέγοντας κατάλληλη τιμή του ε, περιορίζουμε το $g(x)$ σε διάστημα της μορφής $\left(\kappa,\kappa+1\right)$, $\kappa\in Z$ οπότε $\left[g(x)\right]=\kappa$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot\left[\frac{\alpha^2}{x}\right]$, $\alpha\ne0$ έχει όριο στο $x_0=0$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $\left(\text{επειδή } \lim\limits_{x\to0^{\pm}}\frac{\alpha^2}{x}=\pm\infty\right)$

$$\frac{\alpha^2}{x}-1<\left[\frac{\alpha^2}{x}\right]\le\frac{\alpha^2}{x}$$

Τότε $x^2\left(\frac{\alpha^2}{x}-1\right)<x^2\left[\frac{\alpha^2}{x}\right]\le x^2\frac{\alpha^2}{x}$, $x\ne0$

άρα $x\alpha^2-x^2<x^2\left[\frac{\alpha^2}{x}\right]\le x\alpha^2$

Είναι όμως $\lim\limits_{x\to0}\left(x\alpha^2-x^2\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\alpha^2\right)=0$

Άρα σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

2. Να εξετάσετε αν έχει όριο στο $x_0 = 4$ η συνάρτηση f με $f(x) = 2x + \left[\frac{x}{2}\right]$.

ΛΥΣΗ

Είναι $\lim_{x\to 4}\frac{x}{2} = 2$. Άρα υπάρχει ένα σύνολο $U(4,\delta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$2-\varepsilon < \frac{x}{2} < 2+\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

ή

$4-2\varepsilon < x < 4+2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

Η τελευταία θα ισχύει και για $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Άρα $3 < x < 5$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

α) $3 < x < 4$ είναι $\frac{3}{2} < \frac{x}{2} < 2$ και $\left[\frac{x}{2}\right] = 1$

Ο τύπος της f είναι $f(x) = 2x+1$ άρα

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(2x+1) = 9$

β) $4 < x < 5$ τότε $2 < \frac{x}{2} < \frac{5}{2}$ και $[x] = 2$.

Ο τύπος της f γίνεται $f(x) = 2x+2$

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}(2x+2) = 10$

Αφού $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$ δεν υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = 4$.

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ

1. Δείξτε ότι: $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\beta}{\alpha}$ με $f(x) = \frac{x}{\alpha}\left[\frac{\beta}{x}\right]$, $\alpha,\beta \in R_+^*$

2. Δείξτε ότι: $\lim_{x\to 2}\left(\left(x-[x]\right)^2 + [x]\right) = 2$

3. Να εξετάσετε αν έχει όριο στο x_0 η συνάρτηση f όταν:

α) $f(x) = 2x + \left[\dfrac{x}{2}\right]$ και $x_0 = 4$

β) $f(x) = x^2 + \left[x^2\right]$ και $x_0 = \sqrt{3}$

4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 \cdot \left[\dfrac{\alpha^2}{x}\right]$, $\alpha \neq 0$ έχει στο $x_0 = 0$.

5. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$

β) $\lim\limits_{x\to 1}[x]^{[x]}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x]}{x}$

6. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια, με $\alpha, \beta \in R_+^*$

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{\alpha}\left[\dfrac{\beta}{x}\right]\right)$

β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{\alpha}\left[\dfrac{\beta}{x}\right]\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left[\dfrac{\beta}{x}\right]\cdot\dfrac{x}{\alpha}\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$

7. Αν $f(x) = \dfrac{x^3}{5}\left[\dfrac{3}{x^2}\right]$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

8. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{4}\left[\dfrac{2}{x-1}\right]\right) = \dfrac{1}{2}$.

9. Αφού πρώτα βρείτε το όριο στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης $g(x) = x^3 \cdot \left[\frac{\pi}{x}\right]$, κατόπιν να βρείτε, αν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f : R^* \to R$ για την οποία ισχύει $|f(x) - g(x)| \le 4|x| \cdot συν\frac{\pi}{x^2}$.

10. Να βρείτε εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ όπου $f(x) = \left[x + \left(x - [x]\right)^2\right]$

β) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ όπου $g(x) = ημx + [συνx]$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = [x] + \left(x - [x]\right)^2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x}{\lambda}\left[\frac{\kappa}{\lambda}\right]$ και $f(x) = \left[\frac{x}{\kappa}\right]\frac{\lambda}{\kappa}$ με $\kappa, \lambda \in R_+^*$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f : R^* \to R$ με $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x^2]}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

14. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to \lambda} f(x)$, όπου $f(x) = [x]$ και λ τυχαίος πραγματικός αριθμός.

15. Έστω $f : [0,1] \to R$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ (συνάρτηση Dirichlet).

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει οριακή τιμή για κανένα x στο πεδίο ορισμού της.

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to R$. Να αποδείξετε ότι: Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in R$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε x_1, $x_2 \in A$ με $0 < |x_1 - x_2| < \delta$ και $|x - x_1| < \delta$ να ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ **(Κριτήριο Cauchy).**

Παρατήρηση: Επειδή οι αντιθετοαντίστροφες προτάσεις είναι ισοδύναμες, δηλαδή

$$\{P_1 \Rightarrow P_2\} \Leftrightarrow \{\text{όχι } P_2 \Rightarrow \text{όχι } P_1\}$$

το παραπάνω κριτήριο χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές «αρνητικά» δηλαδή για την απόδειξη ότι **δεν** υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Αν υπάρχει $\varepsilon > 0: \forall \delta > 0$ να υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $0 < |x - x_1| < \delta$ και $0 < |x - x_2| < \delta$ τέτοια, ώστε να είναι $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$, τότε δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο x_0.

17. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}\dfrac{\pi}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$.